

H_V - حلقه های فازی

محسن اصغری لاریمی^{۱*}، محمد اصغری لاریمی^۲

۱- استادیار، دانشگاه گلستان ۲- دانشجوی دکتری، دانشگاه پیام نور تهران

(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

با توجه به اهمیت ابرساختارهای جبری و منطق فازی در حوزه ساختارهای جبری، پژوهش در زمینه ارتباط بین آنها، به ویژه تحقیقات در راستای مفهوم H_V - ساختارهای جبری فازی اهمیت خاصی دارد. هدف این پژوهش گسترش مفهوم فازی روی H_V - حلقه هاست، در این راستا، ابتدا مفهوم H_V - حلقه های فازی بیان شده و مثال ها و نتایج اساسی از این تعریف ارائه گردیده است. در ادامه، به مطالعه مفهوم H_V - همریختی های فازی از حلقه های فازی پرداخته و نتایج مهم آن بیان شده است. به علاوه، مفهوم p - برش از H_V - حلقه های فازی بیان شده و همچنین، ارتباط بین H_V - حلقه های فازی و H_V - حلقه ها مورد بررسی قرار گرفته شده است و نتیجه تحقیق به این صورت بیان می شود که با چه شرایطی به کمک مفهوم p - برش نتایج این دو مفهوم قابل تبدیل به یکدیگر هستند.

واژه های کلیدی: ابرساختار، H_V - حلقه، H_V - نیم گروه فازی، H_V - حلقه فازی

۱- مقدمه

در [۲۵] سن و همکارانش مفهوم جدیدی از فازی را در نیم ابرگروه ها بیان کردند. در ادامه این مفهوم در ابرحلقه ها [۲] و ابرمدول ها [۲۶] مورد بررسی قرار گرفت و نتایج جالبی در این زمینه بدست آمد. این پژوهش گسترش همین مفهوم فازی روی H_V - حلقه ها می باشد.

۲- پیش نیازها

فرض کنید H یک مجموعه غیر تهی و $P^*(H)$ مجموعه همه زیرمجموعه های غیر تهی از H باشد. در این صورت یک ابرعمل روی H یک نگاشت $H \times H \rightarrow P^*(H)$ می باشد که زوج (H, \circ) را یک ابرگروه وارده یا یک ابرساختار گویند. اگر A و B زیرمجموعه های غیر تهی از H باشند، آن گاه:

$$A \circ B = \bigcup_{\substack{a \in A \\ b \in B}} a \circ b, \quad x \circ A = \{x\} \circ A, \quad A \circ x = A \circ \{x\}.$$

یک ابرساختار (H, \circ) را یک نیم ابرگروه گویند، هرگاه برای هر $x, y, z \in H$ داشته باشیم $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ ، یعنی

$$\bigcup_{u \in x \circ y} u \circ z = \bigcup_{v \in y \circ z} x \circ v$$

یک نیم ابرگروه (H, \circ) را یک ابرگروه گویند، هرگاه برای هر $x \in H$ داشته باشیم:

مفهوم ابرگروه ها اولین بار در سال ۱۹۳۴ توسط مارتی [۱] بیان شده است. ابرساختارهای جبری تعمیم مناسبی از ساختارهای جبری کلاسیک می باشند. در یک ساختار کلاسیک جبری، ترکیب دو عنصر یک عنصر است، ولی در یک ابرساختارهای جبری، ترکیب دو عنصر یک مجموعه است. از آن زمان، محققان زیادی بر روی این موضوع تحقیق کرده اند

[۲ و ۳-۱۰]. کلاس جدیدی از ابرساختارها به نام H_V - ساختارها اولین بار توسط وجیو کلیس [۱۱] در سال ۱۹۹۰ بیان شده است. H_V - ساختارها، ابرساختارهایی هستند که در آن برابری با تقاطع غیر خالی جایگزین می شود. برای بررسی و اطلاعات بیشتر در ارتباط با مفهوم H_V - ساختارها می توان به کتاب های [۱۴-۱۰، ۱۲] و مقالات [۲۰-۱۵] مراجعه کرد.

اولین بار مفهوم زیرمجموعه فازی در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی عسکرزاده [۲۱] بیان شده است. بنا به تعریف زیرمجموعه فازی، نگاشتی از یک مجموعه غیر تهی H به بازه حقیقی $[0, 1]$ می باشد. مفهوم ساختارهای جبر فازی با تعریف زیرگروه های فازی توسط رزنفیلد [۲۲] شروع شد، و سپس این مفهوم به طور چشمگیری در ریاضیات تعمیم داده شده است [۸ و ۲۳]. مطالعه ابرساختارهای فازی موضوع جالبی در مجموعه های فازی است. در ارتباط با مجموعه های فازی و ابرساختارها مقالات زیادی استخراج شد که عبارتند از [۱۹ و ۲۴].

مفهوم H_v -ساختارها برای اولین بار توسط وجیوکیلیس [۱۱] بیان شد. مفهوم H_v -ساختارها همان مفهوم ابرساختارها می‌باشند که در آن به جای تساوی از اشتراک غیرتهی استفاده شده است. یک ابرساختار (H, \circ) را یک H_v -نیم‌گروه گویند، هرگاه برای هر $x, y, z \in H$

$$(R, \oplus, *) , (R, \oplus, \otimes) , (R, \oplus, \square) , (R, \oplus, \cdot)$$

در این صورت H_v یک حلقه هستند.

(۲) [۱۶] فرض کنید R مجموعه اعداد حقیقی و سه ابرعمل روی R^n به صورت

$$x \oplus y = \{r(x+y) : r \in [0,1]\},$$

$$x \square y = \{x+r(y-x) : r \in [0,1]\},$$

$$x \cdot y = \{x+ry : r \in [0,1]\}.$$

تعریف شوند. در این صورت $(R^n, *, \circ)$ یک H_v -حلقه می‌باشد، که در آن $\circ \in \{\oplus, \square, \cdot\}$. $*$ یک زیرمجموعه غیرتهی H از R را یک H_v -زیرحلقه از $(R, +, \circ)$ گویند، هرگاه $(H, +)$ یک H_v -زیرگروه از $(R, +)$ باشد و برای هر $h \in H$ و هر $r \in R$

$$r \cdot h \in P^*(H) \text{ و } h \cdot r \in P^*(H)$$

مفهوم H_v -حلقه‌ها یک گسترشی از یک حلقه‌ها می‌باشد. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به مراجع [۱۱-۱۳ و ۱۵] مراجعه کرد.

۳- H_v -حلقه‌های فازی و H_v -حلقه‌ها

در این بخش، مفهوم H_v -حلقه‌های فازی بیان می‌شود و ارتباط بین H_v -حلقه‌های فازی و H_v -حلقه‌ها بررسی می‌گردد. مفهوم ابرگروه فازی در مرجع [۱۱] بیان شد. فرض کنید S مجموعه غیرتهی و $F^*(S)$ مجموعه همه زیرمجموعه‌های فازی غیرصفر از S باشد. یک ابرعمل فازی روی S یک نگاشت مانند $\circ : S \times S \rightarrow F^*(S)$ است که در آن تصویر (a, b) با $a \circ b$ نشان داده می‌شود. در این حالت (S, \circ) را یک ابرساختار فازی گویند. ابرساختار فازی (S, \circ) را جابجایی گویند، هرگاه برای هر $a, b \in S$ ، $a \circ b = b \circ a$. ابرساختار فازی (S, \circ) را یک نیم ابرگروه فازی گویند، هرگاه برای هر $a, b, c \in R$ ، $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ و برای هر $r \in S$ ، $\mu \in F^*(S)$

داریم:

$$(a \circ \mu)(r) = \bigvee_{t \in S} ((a \circ t)(r) \wedge \mu(t)),$$

$$(\mu \circ a)(r) = \bigvee_{t \in S} (\mu(t) \wedge (t \circ a)(r)).$$

$$x \circ H = H \circ x = H.$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد ابرگروه‌ها به کتاب‌های [۱۰] و [۱۴] مراجعه شود.

$$((x \circ y) \circ z) \cap (x \circ (y \circ z)) \neq \emptyset$$

تعریف ۱-۲. یک H_v -نیم‌گروه (H, \circ) را یک H_v -گروه گویند، هرگاه برای هر $x \in H$ ، $x \circ H = H \circ x = H$.

اگر (H, \circ) یک ابرگروه و $\emptyset \neq K \subseteq H$ ، آن‌گاه (K, \circ) را یک H_v -زیرگروه از (H, \circ) گویند، هرگاه برای هر $x \in K$

$$x \circ K = K \circ x = K$$

یک H_v -گروه (H, \circ) را یک H_v -گروه جابجایی ضعیف گویند، هرگاه برای هر $x, y \in H$

$$(x \circ y) \cap (y \circ x) \neq \emptyset$$

قضیه ۲-۲. [۱۹] فرض کنید $(G, *)$ یک H_v -گروه باشد. در این صورت برای هر $a, b \in G$ ، $a * b \neq \emptyset$.

تعریف ۳-۲. [۱۲] اگر R یک مجموعه غیرتهی باشد، دستگاہ $(R, +, \circ)$ را یک H_v -حلقه گویند، هرگاه

(i) $(R, +)$ یک H_v -گروه جابجایی ضعیف باشد،

(ii) (R, \circ) یک H_v -نیم‌گروه باشد،

(i) ابرعمل " \circ " نسبت به ابرعمل " $+$ " دارای خاصیت

توزیع‌پذیری ضعیف باشد، یعنی برای هر $x, y, z \in H$

$$(x \circ (y + z)) \cap (x \circ y + x \circ z) \neq \emptyset$$

$$((x + y) \circ z) \cap (x \circ z + y \circ z) \neq \emptyset$$

اکنون به چند مثال از H_v -حلقه‌ها می‌پردازیم.

مثال‌ها:

(۱) [۲۷] فرض کنید $(R, +, \circ)$ یک حلقه و $A : R \rightarrow [0,1]$ یک مجموعه فازی باشد. فرض کنید ابرعمل‌های \otimes و $*$ به صورت زیر تعریف شوند

الف) $x \otimes y = \{t : A(t) = A(x+y)\}$,

ب) $x * y = \{t : A(t) = A(x \cdot y)\}$,

ج) اگر $A(x) \leq A(y)$ ، آن‌گاه

$$x * y = y * x = \{t : A(x) \leq A(t) \leq A(y)\}$$

تعریف ۳-۱. یک H_v -گروه فازی (S, \circ) را جابجایی ضعیف گویند، هرگاه برای هر $a, b \in S$ ، عنصر $x \in S$ موجود باشد به طوری که

$$(b \circ a)(x) > 0, (a \circ b)(x) > 0,$$

فرض کنید (S, \circ) یک H_v -گروه جابجایی ضعیف باشد و $a, b \in S$. در این صورت $(a \circ b) \cap (b \circ a) \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر عنصر $x \in S$ چنان موجود باشد به طوری که $(\chi_{a \circ b} \wedge \chi_{b \circ a})(x) = 1$ اگر و تنها اگر $x \in (a \circ b) \cap (b \circ a)$ اگر و تنها اگر $(\chi_{a \circ b} \wedge \chi_{b \circ a})(x) \neq 0$ اگر و تنها اگر $\chi_{a \circ b}(x) > 0, \chi_{b \circ a}(x) > 0$.

این مطلب نشان می‌دهد که مفهوم H_v -گروه جابجایی ضعیف فازی گسترشی از مفهوم H_v -گروه جابجایی ضعیف است. اکنون با تعریف H_v -حلقه فازی شروع می‌کنیم.

تعریف ۳-۲. فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و \oplus و \odot دو ابرساختار فازی روی R باشند. در این صورت دستگاه (R, \oplus, \odot) را یک H_v -حلقه فازی گویند، هرگاه

(i) ابرساختار (R, \oplus) یک H_v -گروه جابجایی ضعیف فازی باشد.

(ii) ابرساختار (R, \odot) یک H_v -نیم گروه فازی باشد.

(iii) ابرعمل \odot نسبت به ابرعمل \oplus توزیع‌پذیر فازی باشد، یعنی برای هر $a, b, c \in R$

$$\exists x \in R, (a \square (b \oplus c))(x) > 0, ((a \square b) \oplus (a \square c))(x) > 0$$

$$\exists x \in R, ((a \oplus b) \square c)(x) > 0, ((a \square c) \oplus (b \square c))(x) > 0.$$

فرض کنید (R, \oplus, \odot) یک H_v -حلقه و $a, b, c \in R$. در این صورت $((a \oplus b) \odot c)(x) \cap ((a \odot c) \oplus (b \odot c))(x) \neq \emptyset$ اگر و تنها اگر عنصر $x \in R$ موجود باشد به طوری که $x \in ((a \oplus b) \odot c) \cap ((a \odot c) \oplus (b \odot c))$ اگر و تنها اگر $(\chi_{((a \oplus b) \odot c)} \wedge \chi_{((a \odot c) \oplus (b \odot c))})(x) > 0$ به طور مشابه $\chi_{((a \oplus b) \odot c)}(x) > 0$ و $\chi_{((a \odot c) \oplus (b \odot c))}(x) > 0$ اگر و تنها $((a \odot (b \oplus c)) \cap ((a \odot b) \oplus (a \odot c)))(x) \neq \emptyset$ اگر عنصر $x \in R$ موجود باشد به طوری که $\chi_{((a \odot (b \oplus c)) \cap ((a \odot b) \oplus (a \odot c)))}(x) > 0$ و $\chi_{((a \odot (b \oplus c)) \cap ((a \odot b) \oplus (a \odot c)))}(x) > 0$ بنابرین، نشان می‌دهد که مفهوم H_v -حلقه‌های فازی گسترشی از مفهوم H_v -حلقه‌های می‌باشد.

مثال ۳-۳. فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی باشد. برای هر $a, b \in R$ تعریف می‌کنیم $a \oplus b = \chi_{\{a, b\}}$ و

اگر A یک زیرمجموعه غیرتهی از S و $x \in S$ باشد، آن‌گاه برای هر $t \in S$ داریم:

$$(A \circ x)(t) = \bigvee_{a \in A} (a \circ x)(t), (x \circ A)(t) = \bigvee_{a \in A} (x \circ a)(t)$$

اگر (S, \circ) یک ابرساختار فازی باشد به طوری که $\mu, \nu \in F^*(S)$ ، آن‌گاه برای هر $t \in S$ نماد $\mu \circ \nu$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mu \circ \nu) = \bigvee_{p, q \in S} (\mu(p) \wedge (p \circ q)(t) \wedge \nu(q)).$$

اگر A یک زیرمجموعه غیرتهی از S باشد، آن‌گاه تابع مشخصه آن برای $x \in S$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

به ویژه، برای هر $a, x \in S$ ، اگر $A = \{a\}$ ، آن‌گاه

$$\chi_a(x) = \begin{cases} 1, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases}$$

یک نیم ابرگروه (S, \circ) را یک ابرگروه فازی گویند، هرگاه برای هر $x \in S$ ، $x \circ S = S \circ x = \chi_S$. یک ابرگروه فازی (S, \circ) را جابجایی فازی گویند، هرگاه برای هر $a, b \in S$ ، $a \circ b = b \circ a$. فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و \oplus و \odot دو ابرعمل فازی روی R باشند.

دستگاه (R, \oplus, \odot) را یک ابرحلقه فازی گویند، هرگاه اولاً: (R, \oplus) یک ابرگروه فازی جابجایی باشد،

ثانیاً: (R, \odot) یک نیم ابرگروه فازی باشد،

ثالثاً: \odot نسبت به \oplus توزیع‌پذیر فازی باشد، یعنی، برای هر $a, b, c \in R$ داشته باشیم

$$(a \square (b \oplus c)) = ((a \square b) \oplus (a \square c)), ((a \oplus b) \square c) = ((a \square c) \oplus (b \square c))$$

حالا مفهوم H_v -نیم گروه فازی را که در مرجع [۵] تعریف شد، در ادامه بیان می‌کنیم.

یک ابرساختار فازی (S, \circ) را یک H_v -نیم گروه فازی گویند، هرگاه برای هر $a, b, c \in S$ ، عنصر $x \in S$ موجود باشد به طوری که:

$$((a \circ b) \circ c)(x) > 0, (a \circ (b \circ c))(x) > 0.$$

یک H_v -نیم گروه فازی (S, \circ) را یک H_v -گروه فازی گویند، هرگاه برای هر $a \in S$ ، $a \circ S = S \circ a = \chi_S$.

اگر برای هر $a, b \in R$ دو ابرعمل \oplus و \circ به صورت

$$(a \circ b)(t) = \begin{cases} \mu(a) \wedge \mu(b) & , t = ab \\ 0 & , o.w. \end{cases}$$

تعریف شوند. در این صورت (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه است.

اثبات. با استفاده از قضیه ۲,۳ و ۱۰,۳ از مرجع [۵]، ابرساختار (R, \oplus) یک H_V -گروه جابجایی ضعیف فازی و (R, \circ) یک H_V -نیم گروه فازی است. از طرف دیگر برای هر $a, b, c \in R$ داریم

$$\begin{aligned} ((a \oplus b) \circ c)(x) &= \bigvee_{y \in R} \mu(aby^{-1}) \wedge \mu(yoc)(x) \\ &\geq \mu(a) \wedge \mu(bc)(x) \\ &= \begin{cases} \mu(a) \wedge \mu(b) \wedge \mu(c) & x = ab, \\ 0 & o.w. \end{cases} \end{aligned}$$

و همچنین برای هر $x \in R$ داریم

$$\begin{aligned} ((a \circ c) \oplus (b \circ c))(x) &= \bigvee_{s, t \in R} ((a \circ c)(s) \wedge (b \circ c)(t) \wedge \mu(stx^{-1})) \\ &\geq \mu(a) \wedge \mu(b) \wedge \mu(c) \wedge \mu(abc^2x^{-1}). \end{aligned}$$

بنابراین، $((a \oplus b) \circ c)(ab) \geq \mu(a) \wedge \mu(b) \wedge \mu(c) > 0$ و $((a \circ c) \oplus (b \circ c))(ab) \geq \mu(a) \wedge \mu(b) \wedge \mu(c) > 0$ به طور مشابه می توان نشان داد $(a \circ (b \oplus c))(ab) > 0$ و $((a \circ c) \oplus (b \circ c))(ab) > 0$ در نتیجه (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه است.

قضیه ۳-۸. فرض کنید (R, \circ) یک H_V -گروه فازی و برای هر $a, b \in R$ عنصر $x \in R$ چنان موجود باشد به طوری که $(a \circ b)(x) > 0$ فرض کنید برای هر $a, b \in R$ ، $(a \oplus b) = \chi_R$ در این صورت (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه فازی است.

اثبات. آسان است.

قضیه زیر ارتباط بین H_V -گروه های فازی و H_V -گروه ها را نشان می دهد.

قضیه ۳-۹. فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک H_V -حلقه و $\mu \in F(R)$ به طوری باشد که برای هر $a \in R$ $\mu(a) \neq 0$ و $\bigvee_{x \in R} \mu(x) = 1$

اگر برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم

$$(a \circ b)(t) = \begin{cases} \mu(t) & , t = ab \\ 0 & , o.w. \end{cases}, (a \oplus b)(t) = \begin{cases} \mu(t) & , t \in a + b \\ 0 & , o.w. \end{cases}$$

آن گاه (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه فازی است.

$$(a \circ b)(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , t \in \{a, b\} \\ 0 & , o.w. \end{cases}$$

در این صورت (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه فازی است.

اثبات. با استفاده از مثال ۴,۳ و قضیه ۸,۳ از مرجع [۵]، ابرساختار (R, \circ) یک H_V -نیم گروه فازی و (R, \oplus) یک H_V -گروه فازی است. چون برای هر $a, b \in R$ داریم $(a \oplus b)(a) = 1 > 0$ و $(b \oplus a)(a) = 1 > 0$ در نتیجه (R, \oplus) یک H_V -گروه جابجایی ضعیف فازی است. از طرفی دیگر با محاسبه ساده داریم

$$((a \oplus b) \circ c)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in \{a, b, c\} \\ 0 & , o.w. \end{cases}, ((a \circ b) \oplus (b \circ c))(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , x \in \{a, b, c\} \\ 0 & , o.w. \end{cases}$$

بنابراین، اگر $x \in \{a, b, c\}$ آن گاه

$$((a \oplus b) \circ c)(x) = ((a \circ c) \oplus (b \circ c))(x) = \frac{1}{2} > 0$$

به طور مشابه برای $x \in \{a, b, c\}$ می توان نشان داد

$$(a \circ (b \oplus c))(x) = ((a \circ b) \oplus (a \circ c))(x) = \frac{1}{2} > 0$$

در نتیجه (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه فازی است.

مثال ۳-۴. فرض کنید $R = \{a, b\}$ و فرض کنید دو ابرعمل \oplus و \circ

برای هر $x, y \in R$ طوری تعریف شوند که

$$(a \circ a)(b) = 0.2 \text{ و } (a \circ a)(a) = 0.1 \text{ و } x \oplus y = \chi_{\{x, y\}}$$

$$(a \circ b)(a) = 0.5, (b \circ b)(b) = 0.4, (b \circ b)(a) = 0.3$$

$$(b \circ a)(b) = 0.8 \text{ و } (b \circ a)(a) = 0.7, (a \circ b)(b) = 0.6$$

در این صورت (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه فازی است، اما (R, \oplus, \circ) یک ابرحلقه فازی نیست.

قضیه ۳-۵. فرض کنید (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه فازی باشد.

در این صورت برای هر $a, b \in R$ داریم $a \circ b \neq 0$ و $a \oplus b \neq 0$ **اثبات.** آسان است.

قضیه ۳-۶. فرض کنید (R, \oplus, \circ) یک ابرحلقه فازی باشد. فرض

کنید برای هر $a, b \in S$ $(a \circ b)(x) > 0$ و $(b \circ a)(x) > 0$ در این صورت (R, \oplus, \circ) یک H_V -حلقه فازی است.

اثبات. آسان است.

قضیه ۳-۷. فرض کنید μ یک زیرمجموعه فازی از گروه

آبلی R باشد به طوری که برای هر $a \in R$ $\mu(a) \neq 0$.

بنابراین، عنصر $s \in R$ چنان وجود دارد به طوری که $s \in a+b$ و $x \in S \cdot c$ و همچنین عناصر $t, p \in R$ وجود دارند به طوری که $t \in a \cdot c$ و $p \in b \cdot c$ و $x \in t+p$.

آن‌گاه: $(a \oplus b)(s) = \mu(s)$ ، $(s \circ c)(x) = \mu(x)$ و $(b \circ c)(p) = \mu(p)$ ، $(a \circ c)(t) = \mu(t)$ و $(t \oplus p)(x) = \mu(x)$. از طرف دیگر داریم

$$\begin{aligned} ((a \oplus b) \circ c)(x) &= \bigvee_{y \in R} (a \oplus b)(y) \wedge (y \circ c)(x) \geq (a \oplus b)(s) \wedge (s \circ c)(x) \\ &= \mu(s) \wedge \mu(x) > 0 \\ ((a \circ c) \oplus (b \circ c))(x) &= \bigvee_{y \in R} (a \circ c)(y) \wedge (y \oplus z)(x) \wedge (b \circ c)(z) \\ &\geq (a \circ c)(t) \wedge (t \oplus p)(x) \wedge (b \circ c)(p) \\ &= \mu(t) \wedge \mu(x) \wedge \mu(p) > 0. \end{aligned}$$

به طور مشابه می‌توان نشان داد که عنصر $x' \in R$ وجود دارد که $((a \circ b) \oplus (a \circ c))(x') > 0$ و $(a \circ (b \oplus c))(x') > 0$.

بنابراین، (R, \oplus, \circ) یک H_v -حلقه فازی است.

قضیه ۳-۱۰. فرض کنید (R, \oplus, \circ) یک H_v -حلقه فازی باشد. در این صورت

- (i) برای هر $a, b \in R$ ، $\chi_a \circ \chi_b = a \circ b$ ،
 - (ii) برای هر $a \in R$ ، $\chi_a \circ \chi_R = a \circ R$ و $\chi_R \circ \chi_a = R \circ a$ ،
 - (iii) برای هر $\mu \in F(R)$ ، $\chi_R \circ \mu = R \circ \mu$ ، $\mu \in F(R)$ و $\mu \circ \chi_R = \mu \circ R$ ،
 - (iv) برای هر $a, b, c \in R$ ، $\chi_a \circ (\chi_b \circ \chi_c) = a \circ (b \circ c)$ ،
 - (v) برای هر $a, b, c \in R$ ، $(\chi_a \circ \chi_b) \circ \chi_c = (a \circ b) \circ c$ ،
 - (vi) برای هر $a, b, c \in R$ ، $\chi_a \circ (\chi_b \oplus \chi_c) = (\chi_a \circ \chi_b) \oplus (\chi_a \circ \chi_c)$ و $(\chi_a \oplus \chi_b) \circ \chi_c = (\chi_a \circ \chi_c) \oplus (\chi_b \circ \chi_c)$ که در آن $\circ \in \{\oplus, \odot\}$.
- اثبات.** آسان است.

۴- p-برش از H_v -حلقه‌های فازی

فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و (R, \circ) یک ابرساختار باشد. در این صورت p -برش $a \circ b$ برای $a, b \in R$ به صورت $(a \circ b)_p = \{t \in R \mid (a \circ b)(t) \geq p\}$ تعریف می‌شود که در آن $p \in (0, 1]$. همچنین ابرعمل \circ_p روی R به صورت $a \circ_p b = (a \circ b)_p$ بیان می‌شود.

قضیه ۴-۱. [۲۶] فرض کنید R یک مجموعه غیرتهی و \oplus_p و \odot_p ابرساختارهای متناظر \oplus و \odot باشند. در این صورت برای هر $a, b, c, t \in R$ داریم

اثبات. چون $(R, +)$ یک H_v -نیم‌گروه است. آن‌گاه برای هر $a, b, c \in R$ داریم $((a+b)+c) \cap (a+(b+c)) \neq \emptyset$.

بنابراین، عنصر $x \in R$ چنان وجود دارد به طوری که $x \in (a+(b+c))$ و $x \in ((a+b)+c)$. در نتیجه عناصر $s, t \in R$ چنان وجود دارند به طوری که:

$$\begin{aligned} s \in (a+b), \quad x \in s+c, \quad t \in b+c, \quad x \in a+t. \\ \text{آن‌گاه } (s \oplus c)(x) = \mu(x), \quad (a \oplus b)(s) = \mu(s) \text{ و} \\ (a \oplus t)(x) = \mu(x), \quad (b \oplus c)(t) = \mu(t) \\ ((a \oplus b) \oplus c)(x) = \bigvee_{r \in R} (a \oplus b)(r) \wedge (r \oplus c)(x) \geq (a \oplus b)(s) \wedge (s \oplus c)(x) \\ = \mu(s) \wedge \mu(x) > 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \oplus (b \oplus c))(x) = \bigvee_{p \in R} (a \oplus p)(x) \wedge (b \oplus c)(p) \geq (a \oplus t)(x) \wedge (b \oplus c)(t) \\ = \mu(x) \wedge \mu(t) > 0. \end{aligned}$$

بنابراین، (R, \oplus) یک H_v -نیم‌گروه فازی است. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که ابرساختار (R, \circ) یک H_v -نیم‌گروه فازی است.

همچنین، چون $(R, +)$ یک H_v -گروه است. آن‌گاه برای هر $x \in R$ داریم $x+R = R = R+x$. در نتیجه برای هر $t \in R$ عناصر $s_1, s_2 \in R$ چنان وجود دارند به طوری که $t \in (x+s_1) \cap (s_2+x)$ پس، برای هر $t, x \in R$ داریم

$$\begin{aligned} (x \oplus R)(t) = \bigvee_{r \in R} (x \oplus r)(t) = \bigvee_{t \in x \oplus R} \mu(t) = \bigvee_{t \in R} \mu(t) = 1 = \chi_R(t), \\ (R \oplus x)(t) = \bigvee_{r \in R} (r \oplus x)(t) = \bigvee_{t \in R \oplus x} \mu(t) = \bigvee_{t \in R} \mu(t) = 1 = \chi_R(t). \end{aligned}$$

یعنی $x \oplus R = R \oplus x = \chi_R$ در نتیجه $(R, +)$ یک H_v -گروه فازی است.

حال، چون $(R, +)$ یک H_v -گروه جابجایی ضعیف است. آن‌گاه برای هر $a, b \in R$ ، $(a+b) \cap (b+a) \neq \emptyset$. بنابراین، عنصر $x \in R$ چنان وجود دارد که $x \in a+b$ و $x \in b+a$. در نتیجه $(a \oplus b)(x) = \mu(x) > 0$ و $(b \oplus a)(x) = \mu(x) > 0$.

بنابراین (R, \oplus) یک H_v -گروه جابجایی ضعیف فازی است. برای اثبات توزیع پذیری فازی، چون $(R, +, \cdot)$ یک H_v -حلقه است. برای هر $a, b, c \in R$ داریم

$$((a+b) \cdot c) \cap ((a \cdot c) + (b \cdot c)) \neq \emptyset$$

در نتیجه عنصر $x \in R$ چنان وجود دارد به طوری که $x \in ((a+b) \cdot c)$ و $x \in ((a \cdot c) + (b \cdot c))$.

$$a+b = \{x \in R \mid (a \oplus b)(x) > 0\}, \quad a \cdot b = \{x \in R \mid (a \circ b)(x) > 0\}.$$

قضیه ۴-۵. فرض کنید (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی باشد. در این صورت $(R, +, \cdot)$ یک H_V -حلقه است.

اثبات. با استفاده از قضیه ۴،۴، ابرساختار $(R, +)$ یک H_V -گروه جابجایی ضعیف و (R, \cdot) یک H_V -نیم گروه است. فرض کنید (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی باشد. در این صورت $a, b, c \in R$ عنصر $x \in R$ چنان وجود دارد به طوری که $x \in (a \cdot (b + c)) \cap ((a \cdot b) + (a \cdot c))$ آن گاه

$$(a \square (b \oplus c))(x) > 0, \quad ((a \square b) \oplus (a \square c))(x) > 0$$

$$\bigvee_{p, q \in R} (a \square b)(p) \wedge (p \oplus q)(x) \wedge (a \square c)(q) > 0$$

و $\bigvee_{t \in R} (a \square t)(x) \wedge (b \oplus c)(t) > 0$ در نتیجه عناصر

$$x, t_1, p_1, q_1 \in R \text{ وجود دارند به طوری که}$$

$$x \in a \cdot t_1, \quad t_1 \in b + c, \quad p_1 \in a \cdot b, \quad x \in p_1 + q_1, \quad q_1 \in a \cdot c$$

$$x \in (a \cdot (b + c)) \cap ((a \cdot b) + (a \cdot c)) \quad \text{بنابراین}$$

به طور مشابه می توان نشان داد که برای هر $a, b, c \in R$ عنصر $t \in R$ چنان وجود دارد به طوری که

$$t \in (a \cdot (b + c)) \cap ((a \cdot b) + (a \cdot c))$$

در نتیجه $(R, +, \cdot)$ یک H_V -حلقه است.

بنا به مراجع [۲] و [۲۵]، اگر $(G, *)$ یک ابرگروه باشد، آن گاه برای هر $a, b \in G$ می توان ابرعمل فازی $a \circ b = \chi_{a * b}$ را تعریف کرد.

قضیه ۴-۶. [۵] فرض کنید $(G, *)$ یک H_V -گروه باشد. در این صورت (G, \circ) یک H_V -گروه فازی است.

حال اگر $(R, +, \cdot)$ یک H_V -حلقه باشد، آن گاه برای هر $a, b \in R$ دو ابرعمل متناظر $a \oplus b = \chi_{a+b}$ و $a \circ b = \chi_{a \cdot b}$ را تعریف می کنیم.

قضیه ۴-۷. فرض کنید $(R, +, \cdot)$ یک H_V -حلقه فازی باشد. در این صورت (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی است.

اثبات. با استفاده از قضیه بالا (R, \oplus) یک H_V -گروه فازی و (R, \cdot) یک H_V -نیم گروه فازی است. فرض کنید (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی باشد. چون $(R, +)$ یک H_V -گروه جابجایی ضعیف است. آن گاه برای هر $a, b \in R$ $(a + b) \cap (b + a) \neq \emptyset$. بنابراین عنصر $x \in R$ وجود دارد که $x \in b + a$ و $x \in a + b$ در نتیجه

$$(a \oplus b)(x) = \chi_{[a+b]}(x) = 1 > 0, \quad (b \oplus a)(x) = \chi_{[b+a]}(x) = 1 > 0.$$

پس (R, \oplus) یک H_V -گروه جابجایی ضعیف فازی است. حال،

$$(a \odot (b \oplus c))(t) \geq p \Leftrightarrow t \in (a \odot_p (b \oplus_p c)),$$

$$((a \oplus b) \odot c)(t) \geq p \Leftrightarrow t \in ((a \oplus_p b) \odot_p c),$$

$$((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) \geq p \Leftrightarrow t \in ((a \odot_p b) \oplus_p (a \odot_p c)),$$

$$((b \odot a) \oplus (c \odot a))(t) \geq p \Leftrightarrow t \in ((b \odot_p a) \oplus_p (c \odot_p a)).$$

قضیه ۴-۲. [۵] ابرساختار (R, \circ) یک H_V -گروه فازی است اگر و تنها اگر برای هر $p \in (0, 1]$ ، (R, \circ_p) یک H_V -گروه باشد.

قضیه ۴-۳. (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی است اگر و تنها اگر برای هر $p \in (0, 1]$ ، (R, \oplus_p, \odot_p) یک H_V -حلقه باشد.

اثبات. با استفاده از قضیه ۲،۴، کفایت خاصیت توزیع پذیری را بررسی کنیم. فرض کنید (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی و $p \in (0, 1]$ باشد.

در نتیجه برای هر $a, b, c \in R$ عنصر $t \in R$ وجود دارد به طوری که $(a \odot (b \oplus c))(t) = m > 0$ و

$$((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) = n > 0$$

بنابراین، اگر $m \wedge n = p$ ، آن گاه $(a \odot (b \oplus c))(t) \geq p$ و $((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) \geq p$ اگر و تنها اگر برای هر $a, b, c \in R$ عنصر $t \in R$ وجود دارد به طوری که $t \in (a \odot_p (b \oplus_p c)) \cap ((a \odot_p b) \oplus_p (a \odot_p c))$ مشابه می توان نشان داد که برای هر $a, b, c \in R$ عنصر $t \in R$ وجود دارد به طوری که

$$t \in ((a \oplus_p b) \odot_p c) \cap ((a \odot_p c) \oplus_p (b \odot_p c)).$$

بنابراین (R, \oplus_p, \odot_p) یک H_V -حلقه است.

برعکس، اگر $p \in (0, 1]$ و (R, \oplus_p, \odot_p) یک H_V -حلقه باشد، آن گاه برای هر $a, b, c \in R$ عنصر $t \in R$ وجود دارد که

$$t \in (a \odot_p (b \oplus_p c)) \cap ((a \odot_p b) \oplus_p (a \odot_p c)).$$

بنابراین $(a \odot (b \oplus c))(t) \geq p > 0$ و

$$((a \odot b) \oplus (a \odot c))(t) \geq p > 0$$

در نتیجه (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی است.

اگر (G, \circ) یک H_V -گروه باشد، آن گاه برای هر $a, b \in G$ ، در مراجع [۲] و [۲۵] ابرعمل زیر که متناظر با ابرعمل \circ می باشد تعریف شده است

$$a * b = \{x \in G \mid (a \circ b)(x) > 0\}.$$

قضیه ۴-۴. [۵] فرض کنید (G, \circ) یک H_V -گروه فازی باشد. در این صورت $(G, *)$ یک H_V -گروه است.

حال اگر (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی باشد، دو ابرعمل متناظر را برای هر $a, b \in R$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$(a \circ b)_p = \{t \in R \mid (a \circ b)(t) \geq p\}$ به صورت $p \in (0,1]$ تعریف شود، آن‌گاه ابرساختار (R, \circ) یک H_V -گروه فازی است اگر و تنها اگر برای هر $p \in (0,1]$ ، (R, \circ_p) یک H_V -گروه باشد. همچنین، ثابت کردند، اگر $(G, *)$ یک H_V -گروه باشد، به طوری که برای هر $a, b \in G$ ابرعمل فازی $a \circ b = \chi_{a*b}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه (G, \circ) یک H_V -گروه فازی است.

هدف این پژوهش گسترش مفهوم فازی روی H_V -حلقه‌ها بوده و در این راستا، ابتدا مفهوم H_V -حلقه‌های فازی بیان شده و مثال‌ها و نتایج اساسی از این تعریف ارائه گردیده است. به‌علاوه، مفهوم p -برش از H_V -حلقه‌های فازی بیان شده و همچنین، ارتباط بین H_V -حلقه‌های فازی و H_V -حلقه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است و نشان دادیم که اگر R یک مجموعه غیرتهی و (R, \oplus, \odot) یک ابرساختار باشد، آن‌گاه (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی است اگر و تنها اگر برای هر $p \in (0,1]$ ، (R, \oplus_p, \odot_p) یک H_V -حلقه باشد. همچنین، ثابت کردیم، اگر $(R, +, \cdot)$ یک H_V -حلقه باشد، به طوری که برای هر $a, b \in R$ دو ابرعمل فازی متناظر $a \circ b = \chi_{ab}$ و $a \oplus b = \chi_{a+b}$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی است. در ادامه، برای کار آینده می‌توان مفاهیم H_V -مدول‌های فازی را بررسی نموده و ارتباط بین H_V -مدول‌های فازی و H_V -مدول‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد.

۶- مراجع

- [1] F. Marty, "Sur une generalization de la notion de groupe," 8th Congress Math. Scandenes, Stockholm, pp. 45-49, 1934.
- [2] V. Leoreanu-Fotea and B. Davvaz, "Fuzzy hyperring, Fuzzy Sets and Systems," vol. 160, no. 16, pp. 2366-2378, 2009.
- [3] R. Ameri and M. M. Zahedi, "Hyperalgebraic systems," Ital. J. Pure Appl. Math., no. 6, pp. 21-32, 1999.
- [4] R. Ameri, M. Asghari-Larimi, and M. Maghsoomi, "Direct limits of a direct system of fuzzy complete multialgebra," Journal of Intelligent Fuzzy Systems, vol. 30, no. 3, pp. 1293-1299, 2016.
- [5] N. Jahanshahi-Nukandeh, Y. Talebi, and M. Asghari-Larimi, "Fuzzy Hv-semigroups," Ital. J. Pure Appl. Math., no. 42, pp. 126-140, 2019.
- [6] M. Asghari-Larimi and B. Davvaz, "Hyperstructures associated to arithmetic functions," Ars Combinatoria, vol. 97, pp. 51-63, 2010.
- [7] M. Asghari-Larimi and V. Leoreanu-Fotea, "A connection between hypergroupoids and L-Fuzzy Sets of Type 2," Italian J. of Pure and Appl. Math., no. 26, pp. 207-216, 2009.
- [8] H. Bigdeli, Dr. H. Hasanpour, and J. Tayebi, "Optimistic and pessimistic answers to single-objective and multi-objective matrix games with fuzzy earnings and analysis of some military case," Electronic and cyber defence, vol. 28, pp. 133-145, 2017. (In Persian)

طبق فرض برای هر $a, b, c \in R$ عنصر $x \in R$ وجود دارد به طوری که $x \in ((a+b) \cdot c)$ و $x \in (a \cdot c) + (b \cdot c)$. اگر $x \in ((a+b) \cdot c)$ ، آن‌گاه عنصر $s \in a+b$ ، $s \in R$ وجود دارد به طوری که $x \in sc$. بنابراین

$$((a \oplus b) \odot c)(x) = \bigvee_{y \in R} (a \oplus b)(y) \wedge (y \odot c)(x) = \bigvee_{y \in R} \chi_{[a+b]}(y) \wedge \chi_{[y \odot c]}(x) \geq \chi_{[a+b]}(s) \wedge \chi_{[s \odot c]}(x) = 1 > 0.$$

به طور مشابه، اگر $x \in (a \cdot c) + (b \cdot c)$ ، آن‌گاه عناصر $t, p \in R$ وجود دارند به طوری که $x \in t+p$ ، $p \in b \cdot c$ ، $t \in a \cdot c$ ، نتیجه داریم

$$((a \odot c) \oplus (b \odot c))(x) \geq \chi_{[a \cdot c]}(t) \wedge \chi_{[t+p]}(x) \wedge \chi_{[b \cdot c]}(p) = 1 > 0$$

همچنین به طور مشابه می‌توان نشان داد که عنصر $x' \in R$ وجود دارد به طوری که $(a \odot (b \oplus c))(x') > 0$ و $(a \odot b) \oplus (a \odot c)(x') > 0$

بنابراین: (R, \oplus, \odot) یک H_V -حلقه فازی است. با استفاده از دو قضیه ۵،۴ و ۷،۴ می‌توان نتیجه گرفت که اگر $H_V R$ نشان دهنده کلاسی از H_V -گروه‌ها و $FH_V R$ نشان دهنده کلاسی از H_V -گروه‌های فازی باشند، آن‌گاه می‌توان دو نگاشت زیر را برای هر $a, b \in R$ بیان کرد.

$$(۱) f : H_V R \rightarrow FH_V R \quad f : (R, +, \cdot) = (R, \oplus, \odot) \quad f \text{ که در آن}$$

$$a \circ b = \chi_{ab} \quad \text{و} \quad a \oplus b = \chi_{a+b}$$

$$(۲) f : FH_V R \rightarrow H_V R \quad f : (R, \oplus, \odot) = (R, +, \cdot) \quad \text{که در}$$

$$a \cdot b = \{x \in R \mid (a \circ b)(x) > 0\} \quad \text{و}$$

$$a + b = \{x \in R \mid (a \oplus b)(x) > 0\}$$

۵- نتیجه‌گیری

بعد از این که سن و همکارانش [۲۵] مفهوم جدید نیم‌ابر گروه‌های فازی را بیان کردند. در ادامه، این مفهوم در ابرحلقه‌ها توسط دواز و همکارانش [۲] و همچنین ابرمدول‌ها توسط لئوریانو [۲۶] مورد بررسی قرار گرفت و نتایج جالبی در این زمینه به‌دست آمده است. کلاس جدیدی از ابرساختارها به نام H_V -ساختارها اولین بار توسط وجیوکلوس [۱۱] در سال ۱۹۹۰ بیان شده است. سپس، تحقیقات در راستای مفهوم H_V -ساختارهای جبری فازی اهمیت خاصی پیدا کرد و مورد توجه خیلی از محققین قرار گرفت. در همین راستا، نویسندگان اول همین مقاله و همکارانش مفهوم H_V -نیم‌گروه فازی را در مقاله [۵] بیان نمودند و با تعریف مفهوم p -برش از H_V -گروه فازی، ارتباط بین H_V -گروه فازی و H_V -گروه را بررسی کرده‌اند و نشان دادند، اگر R یک مجموعه غیرتهی و (R, \circ) یک ابرساختار باشد، به طوری که p -برش $a \circ b$ برای $a, b \in R$

- [19] Ch. G. Massouros and A. Dramalidis, "Transposition Hv-groups," *Ars Combinatoria*, vol. 106, pp. 143-160, 2012.
- [20] T. Vougiouklis, "The fundamental relation in hyperrings," The general hyperfield, in: *Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications (AHA 1990)*, World Scientific, pp. 203-211, 1991.
- [21] L. A. Zadeh, "Fuzzy Sets, Inform and Control," vol. 8, no. 3, pp. 338-353, 1965.
- [22] A. Rosenfeld, "Fuzzy groups," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 35, pp. 512-517, 1971.
- [23] J. N. Mordeson and M. S. Malik, "Fuzzy Commutative Algebra," Word Publ., 1998.
- [24] P. He and X. Xin, "Fuzzy hyperlattices, Computers and Mathematics with Applications," vol. 62, no. 12, pp. 4682-4690, 2011.
- [25] M. K. Sen, R. Ameri, and G. Chowdhury, "Fuzzy hypersemigroups," *Soft Comput.*, 2007. doi:10.1007/s00500-007-0257-9.
- [26] V. Leoreanu-Fotea, "Fuzzy hypermodules, Computers and Mathematics with Applications," vol. 57, no. 3, pp. 466-475, 2009.
- [27] T. Vougiouklis, "Representations of hypergroups by hypermatrices," *Rivista di Mat. Pura Ed Appl.*, vol. 2, pp. 7-19, 1987.
- [9] J. Chvalina and S. Hoskova, "Modelling of join spaces with proximities by first-order linear partial differential operators," *Ital. J. Pure Appl. Math.*, vol. 21, pp. 177-190, 2007.
- [10] P. Corsini, "Prolegomena of hypergroup theory," Second edition, Aviani editor, 1993.
- [11] T. Vougiouklis, "Hyperstructures and their representations," Hadronic Press, Inc, Palm Harber, USA, vol. 115, 1994.
- [12] S. Spartalis and T. Vougiouklis, "The fundamental relations on Hv-rings," *Riv. Mat. Pura Appl.*, vol. 13, pp. 7-20, 1994.
- [13] B. Davvaz and V. Leoreanu-Fotea, "Hyperring theory and Applications," International Academic Press, USA, 2007.
- [14] P. Corsini and V. Leoreanu, "Applications of hyperstructure theory," *Advances in Mathematics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.
- [15] B. Davvaz, "A brief survey of the theory of Hv-structures," In: *Proc. 8th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications*, 19 Sep. 2002, Spanidis Press, Samothraki, Greece, pp. 39-70, 2003.
- [16] B. Davvaz, "Fuzzy Hv-groups, Fuzzy Sets and Systems," vol. 101, no 1, pp. 191-195, 1999.
- [17] B. Davvaz, "Fuzzy Hv-submodules, Fuzzy Sets and Systems," vol. 117, no. 3, pp. 477-484, 2001.
- [18] A. Dramalidis, "Dual Hv-rings," *Rivista di Matematica Pura de Applicata*, vol. 17, pp. 55-62, 1996.