مجله علمی- پژوهشی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

ویژه‌نامه ترکیبیات، رمزنگاری و محاسبات، ص ۱۳۰ -۱۲۳

توابع کاردینال کاربرد آن‌ها هرمیت و در حل مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری

فائزه‌سادات یوسفی[۱]، یدالله اردوخانی[۲*]

۱- دانشجوی دکتری دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا(س) ۲- استاد دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه الزهرا(س)

(دریافت: ۱۳۹۷/۰۸/۲۵ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۷/۰۲)

چکیده

در این مقاله، یک روش عددی جدید برای حل مسأله کنترل بهینه کسری با تأخیر در زمانی ارائه شده است. انتگرال کسری از نوع ریمان-لیوویل و مشتق کسری از نوع کاپوتو بیان می‌شود. در این روش، از توابع کاردینال هرمیت به‌عنوان توابع پایه برای تقریب توابع استفاده می‌کنیم. در ادامه، ماتریس عملیاتی انتگرال کسری و تأخیری را به‌دست می‌آوریم و آن‌ها را برای حل مسأله کنترل بهینه به‌کار می‌بریم. در نهایت مسأله مورد مطالعه به سیستم معادلات جبری منجر می‌شود که می‌توان با استفاده از روش تکراری نیوتن، جواب مسأله را به‌دست آورد.

واژه‌های کلیدی: مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری، ماتریس عملیاتی، توابع کاردینال هرمیت

۱- مقدمه

در طول چند دهه گذشته، موضوع محاسبات کسری اعم از نظریه‌های مشتقات و انتگرال‌ها در توصیف بسیاری از پدیده‌های زندگی واقعی مانند مدل‌های هیدرولوژیکی [۱]، پزشکی [۲]، مدل انتقال حرارت [۳]، مدل‌سازی دینامیکی [۴]، امور مالی [۵]، کنترل دما و موتور [۶] به‌وجود آمده است. از این‌رو، ساخت روش‌های تحلیلی و عددی جدید برای حل انواع مختلف معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال کسری، به یک موضوع مهم در آنالیز عددی تبدیل شده است.

مسائل کنترل بهینه کسری شامل شرایطی هستند که توسط عملگرهای دیفرانسیل یا انتگرال کسری ظاهر می‌شوند. همانند انواع مختلف معادلات کسری، بسیاری از این مسائل راه حل‌های تحلیلی و دقیق ندارند. به همین دلیل، پیدا کردن روش‌های عددی قوی و با دقت بالا برای حل انواع مختلفی از این مسائل به یک تحقیق فعال تبدیل شده است.

اولین بار یک راه حل و یک فرمول کلی برای مسائل کنترل بهینه کسری در [۷] معرفی شد. در مرجع [۸] روش مستقیم عددی برای حل آن ارائه داده شد. در [۹] یک سیستم یک بعدی برای حل با استفاده از روش توابع خاص ارائه شده است. در مرجع [۴] روش گارکین برای حل آن به‌کار رفته است.

یکی از انواع مسائل کنترل بهینه کسری، مسأله کنترل بهینه کسری تأخیر زمانی است که دارای کاربردهای مهمی می‌باشد. به‌طور مثال تأخیر در فرایندهای شیمیایی، سیستم‌های الکترونیکی، سیستم‌های حمل ونقل [۱۰] به طور مرتب رخ می‌دهد. نمود این تأخیر در مسأله در تابع وضعیت و یا تابع کنترل ظاهر می گردد.

برای حل این مسأله روش‌های مختلفی ارائه شده است. در [۱۱] با پایه‌های چند جمله ای لژاندر مسأله حل شده است. نویسندگان در [۱۲] و [۱۳] با ارائه روشی بر پایه موجک‌ها جواب مناسبی به‌دست آورده‌اند. در مرجع [۱۴] با استفاده از توابع پایه‌ای بوباکر و در [۱۵] با استفاده از توابع برنشتاین به حل مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری پرداخته شده است.

در مقاله حاضر، ما به معرفی توابع کاردینال هرمیت [۱۶] به‌عنوان توابع پایه می‌پردازیم که ساختار مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، مفهوم حساب کسری و توابع کاردینال هرمیت را بیان می‌کنیم و ماتریس‌های عملیاتی تأخیری و انتگرال را ارائه می‌دهیم. در بخش ۳، فرایند حل مسأله با استفاده از توابع کاردینال هرمیت نشان داده می‌شود. در بخش ۴، با ارائه مثال‌هایی، کارایی روش عددی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲- تعاریف

۲-۱ - مقدماتی در حساب کسری

تعریف ۱. انتگرال کسری ریمان- لیوویل به‌صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۷]:

$$I^{\alpha}u(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^x \frac{u(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}ds, & \alpha>0, x>0\\ u(x), & \alpha=0\end{cases}$$

تعریف ۲. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α و برای $n\in \mathrm{N}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$D^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^x \frac{u^{(n)}(s)}{(x-s)^{\alpha+1-n}}ds,\quad n-1<\alpha\le n.$$

مشتق کاپوتو دارای ویژگی‌های زیر است [۱۷]:

a) $D^{\alpha}I^{\alpha}u(x)=u(x),$

b) $I^{\alpha}D^{\alpha}u(x)=u(x)-\sum_{i=0}^{n-1}u^{(i)}(0)\dfrac{x^i}{i!},$

c) $D^{\alpha}x^{\beta}=\begin{cases}0, & \alpha\in \mathrm{N}_0,\ \beta<\alpha\\ \dfrac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)}x^{\beta-\alpha}, & otherwise.\end{cases}$

d) $D^{\alpha}c=0,$

که در آن، c یک عدد ثابت است.

۲-۲- توابع کاردینال هرمیت

یکی از انواع توابع کاردینال، توابع کاردینال هرمیت است که به صورت چهار مولفه ای زیر تعریف می‌گردد [۱۶]:

$$\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t),\xi_3(t),\xi_4(t))^T$$

که در آن:

$$\xi_1(t)=(t+1)^4(1-4t+10t^2-20t^3)\chi_{[-1,0]}(t)+(t-1)^4(1+4t+10t^2+20t^3)\chi_{[0,1]}(t),$$

$$\xi_2(t)=(t+1)^4(t-4t+10t^3)\chi_{[-1,0]}(t)+(t-1)^4(t+4t+10t^3)\chi_{[0,1]}(t),$$

$$\xi_3(t)=(t+1)^4(\frac{t^2}{2}-2t^3)\chi_{[-1,0]}(t)+(t-1)^4(\frac{t^2}{2}+2t^3)\chi_{[0,1]}(t),$$

$$\xi_4(t)=(t+1)^4(\frac{t^3}{6})\chi_{[-1,0]}(t)+(t-1)^4(\frac{t^3}{6})\chi_{[0,1]}(t),$$

و

$$\chi_{[t_0,t_1]}=\begin{cases}1, & t\in[t_0,t_1]\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

این توابع دارای خاصیت زیر هستند:

اگر $m\in\mathbb{Z}$ باشد:

$$\xi(m)=\delta_m[1,0,0,0]^T,\quad \xi'(m)=\delta_m[0,1,0,0]^T,$$
$$\xi''(m)=\delta_m[0,0,1,0]^T,\quad \xi'''(m)=\delta_m[0,0,0,1]^T,$$

که در آن:

$$\delta_m=\begin{cases}1, & m=0\\ 0, & otherwise.\end{cases}$$

در این مقاله ما از توابع کاردینال هرمیت در فاصله [0,1] با تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم [۱۸]:

$$\xi_{m,k}(t)=\xi_m(2^M t-k),\quad m=1,..,4,\ k=0,..,2^M$$

که در آن، M یک مقدار عدد صحیح مثبت دلخواه است. حال بردار $\psi(t)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(t)=[\xi_{1,0}(t),\ \xi_{2,0}(t),\ \xi_{3,0}(t),\ \xi_{4,0}(t)|\ .\ .\ .\ |\xi_{1,2^M}(t),\ \xi_{2,2^M}(t),\ \xi_{3,2^M}(t),\ \xi_{4,2^M}(t)]^T.$$

اکنون انتگرال حاصل‌ضرب زیر را تعریف می‌کنیم:

$$A=\int_0^1\psi(t)\psi^T(t)dt,$$

و به شکل زیر ظاهر می‌گردد:

$$A=\begin{bmatrix} R & H & 0 & \ldots & 0\\ G & R_1 & H & 0 & \ldots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ & & G & R_{2^M-1} & H\\ 0 & & 0 & G & R\end{bmatrix},\quad (۱)$$

که در آن، A یک ماتریس عددی بلوکی سه قطری از مرتبه $(2^M+1)4\times(2^M+1)4$ است. همچنین ماتریس‌های $R_i, i=1,...,2^M-1$ و R,G,H نیز بلوکی و از مرتبه 4×4 هستند.

۲-۳- تقریب تابع

تابع $f\in L^2[0,1]$ با استفاده از توابع کاردینال هرمیت به‌صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$f(t)\approx\sum_{k=0}^{2^M}\sum_{m=1}^{4}c_{m,k}\xi_{m,k}(t)=C^T\psi(t),$$

$$C = [c_{1,0},\ c_{2,0},\ c_{3,0},\ c_{4,0}\ |c_{1,1},\ c_{2,1},\ c_{3,1},\ c_{4,1}\ |\ldots \\ |c_{1,2^M},\ c_{2,2^M},\ c_{3,2^M},\ c_{4,2^M}]^T.$$

که در آن، C بردارضرایب مجهول از مرتبه $4(2^M+1)$ است و با استفاده از ضرب داخلی $<\ ,\ >$ برای رابطه فوق به دست می‌آوریم:

$$< f(t),\psi(t) >= C^T < \psi(t),\psi(t) >$$

با به‌کارگیری رابطه (۱) داریم:

$$< f(t),\psi(t) >= C^T A$$

بنابراین، بردار ضرایب مجهول از رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$C^T = F^T A^{-1}, \qquad (۲)$$

که درآن:

$$F =< f(t),\psi(t) >= [f_{1,0},\ f_{2,0},\ f_{3,0},\ f_{4,0}\ |\ldots|\ f_{1,2^M},\\ f_{2,2^M},\ f_{3,2^M},\ f_{4,2^M}]^T$$

و

$$f_{i,j} = \int_0^1 f(t)\xi_{i,j}(t)dt, \quad i = 1,2,..,4, \quad j = 0,1,...,2^M.$$

۲-۴- ماتریس عملیاتی انتگرال کسری و تأخیری:

مـاتریس عملیـاتی انتگرال کسـری $P^\alpha = [p_{i,j}]$ بـرای توابـع کاردینال هرمیت به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$I^\alpha \psi(t) \approx P^\alpha \psi(t). \qquad (۳)$$

که در آن،

$$I^\alpha \xi_i(t) = \sum_{j=1}^{(2^M+1)4} p_{i,j}\xi_j(t), \qquad i = 1,...,(2^M+1)4$$

همچنین تابع تـأخیری $\xi_i(t-\upsilon)$ را بـا توابـع کاردینـال هرمیـت تقریب می‌زنیم:

$$\xi_i(t-\upsilon) = \sum_{j=1}^{(2^M+1)4} d_{i,j}\xi_j(t), \qquad i = 1,...,(2^M+1)4.$$

بنابراین، مـاتریس عملیـاتی تـأخیری $D_\upsilon = [d_{i,j}]$ بـرای توابـع کاردینال به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$\psi(t-\upsilon) \approx D_\upsilon \psi(t), \qquad t > \upsilon, 0 \le t \le t_f. \qquad (۴)$$

مرتبـــه هـــر دو مـــاتریس انتگـــرال کســـری و تـــأخیری $(2^M+1)4 \times (2^M+1)4$ است. همچنین مقادیر $[p_{i,j}]$ و $[d_{i,j}]$ از رابطه (۲) به‌دست می‌آید. برای مثال ماتریس عملیـاتی انتگرال کسری برای $\alpha = 1$ و M=0 به‌صورت زیر است:

$$p = \begin{pmatrix}
\frac{2573}{5148} & \frac{145}{143} & -\frac{70}{143} & \frac{140}{13} & \frac{5147}{5148} & -\frac{2}{143} & -\frac{70}{143} & -\frac{140}{13} \\
-\frac{7729}{72\,072} & \frac{1}{143} & \frac{108}{143} & \frac{70}{13} & -\frac{1}{10\,296} & -\frac{1}{143} & -\frac{35}{143} & -\frac{70}{13} \\
\frac{4283}{360\,360} & \frac{1}{715} & -\frac{7}{143} & \frac{27}{13} & \frac{8573}{360\,360} & -\frac{1}{715} & -\frac{7}{143} & -\frac{14}{13} \\
-\frac{2581}{4\,324\,320} & \frac{1}{8580} & -\frac{7}{1716} & \frac{7}{78} & -\frac{1}{617\,760} & -\frac{1}{8580} & -\frac{7}{1716} & -\frac{7}{78} \\
\frac{1}{5148} & -\frac{2}{143} & \frac{70}{143} & -\frac{140}{13} & \frac{2575}{5148} & \frac{145}{143} & \frac{70}{143} & \frac{140}{13} \\
-\frac{1}{10\,296} & \frac{1}{143} & -\frac{35}{143} & \frac{70}{13} & -\frac{7729}{72\,072} & -\frac{1}{143} & \frac{108}{143} & -\frac{70}{13} \\
\frac{1}{51\,480} & -\frac{1}{715} & \frac{7}{143} & -\frac{14}{13} & \frac{4297}{360\,360} & \frac{1}{715} & \frac{7}{143} & \frac{27}{13} \\
-\frac{1}{617\,760} & \frac{1}{8580} & -\frac{7}{1716} & \frac{7}{78} & -\frac{2581}{4\,324\,320} & -\frac{1}{8580} & -\frac{7}{1716} & -\frac{7}{78}
\end{pmatrix}.$$

همچنین مـاتریس عملیـاتی تـأخیری بـرای $\upsilon = \frac{1}{3}$ و M=0 بـه شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$D_{\frac{1}{3}} = \begin{pmatrix}
\frac{11\,852\,048}{14\,348\,907} & \frac{22\,059\,296}{14\,348\,907} & -\frac{7\,868\,560}{1\,594\,323} & -\frac{175\,567\,280}{1\,594\,323} & \frac{2\,433\,115}{14\,348\,907} & -\frac{25\,844\,896}{14\,348\,907} & -\frac{3\,322\,480}{1\,594\,323} & -\frac{266\,183\,120}{1\,594\,323} \\
-\frac{835\,504}{3\,720\,087} & -\frac{72\,304}{531\,441} & \frac{199\,600}{19\,683} & -\frac{5\,445\,920}{59\,049} & \frac{248\,218}{3\,720\,087} & -\frac{304\,639}{531\,441} & \frac{20\,320}{19\,683} & -\frac{837\,200}{59\,049} \\
\frac{366\,392}{14\,348\,907} & -\frac{643\,168}{14\,348\,907} & -\frac{663\,976}{1\,594\,323} & -\frac{16\,090\,520}{1\,594\,323} & \frac{138\,070}{14\,348\,907} & -\frac{1\,587\,502}{14\,348\,907} & -\frac{1\,350\,253}{1\,594\,323} & -\frac{30\,456\,560}{1\,594\,323} \\
-\frac{187\,736}{167\,403\,915} & -\frac{79\,432}{23\,914\,845} & \frac{419\,080}{1\,594\,323} & -\frac{811\,184}{177\,147} & \frac{2332}{3\,720\,087} & -\frac{91\,558}{23\,914\,845} & \frac{27\,010}{1\,594\,323} & \frac{20\,849}{531\,441} \\
-\frac{20\,224}{14\,348\,907} & \frac{1\,815\,296}{14\,348\,907} & -\frac{8\,243\,200}{1\,594\,323} & \frac{196\,564\,480}{1\,594\,323} & \frac{11\,891\,200}{14\,348\,907} & \frac{24\,249\,344}{14\,348\,907} & -\frac{2\,114\,560}{1\,594\,323} & \frac{165\,329\,920}{1\,594\,323} \\
\frac{48\,896}{100\,442\,349} & -\frac{671\,488}{14\,348\,907} & \frac{3\,192\,320}{1\,594\,323} & -\frac{78\,755\,840}{1\,594\,323} & -\frac{22\,880\,768}{100\,442\,349} & -\frac{770\,560}{14\,348\,907} & \frac{3\,537\,920}{1\,594\,323} & -\frac{86\,097\,920}{1\,594\,323} \\
-\frac{5632}{100\,442\,349} & \frac{88\,448}{14\,348\,907} & -\frac{453\,376}{1\,594\,323} & \frac{11\,749\,120}{1\,594\,323} & \frac{2\,591\,488}{100\,442\,349} & -\frac{421\,888}{14\,348\,907} & -\frac{280\,576}{1\,594\,323} & \frac{20\,293\,120}{1\,594\,323} \\
\frac{2432}{1\,506\,635\,235} & -\frac{57\,856}{215\,233\,605} & \frac{69\,376}{4\,782\,969} & -\frac{1\,954\,048}{4\,782\,969} & -\frac{371\,968}{301\,327\,047} & \frac{548\,096}{215\,233\,605} & -\frac{29\,696}{4\,782\,969} & -\frac{4\,991\,488}{4\,782\,969}
\end{pmatrix}$$

۳- بیان مسأله

در این بخش به معرفی مسأله کنترل بهینه کسری تاخیری زمانی می پردازیم. هدف از حل این مساله کمینه کردن تابع هزینه

$$J = \frac{1}{2}X^T(t_f)NX(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f}[X^T(t)Q(t)X(t) + U^T(t)R(t)U(t)]dt,$$

تحت شرایط زیر میباشد

$$
\begin{aligned}
&D^{\alpha} X(t)=W(t)X(t)+K(t)X(t-\upsilon)+G(t)U(t) \\
&\quad +Z(t)U(t-\mu), \qquad 0\le t\le t_f, \\
&X(0)=X_0, \\
&U(0)=U_0, \\
&X(t)=\phi(t), \qquad -\upsilon\le t<0, \\
&U(t)=\theta(t), \qquad -\mu\le t<0.
\end{aligned}
$$

همچنین بردار $X(t)$ بردار وضعیت و $U(t)$ بردار کنترل نـام دارد که هر دو مجهول و به‌صورت برداری زیر هستند:

$$X(t)=[x_1(t),\ x_2(t),\ \dots ,x_n(t)]^T,$$

$$U(t)=[u_1(t),\ u_2(t),\ \dots ,u_m(t)]^T.$$

مـــاتریس‌هـــای $W(t),K(t),G(t),Q(t),R(t),Z(t),N$ ماتریس‌های معلوم هستند .

هدف اصلی یافتن بردار وضعیت و بـردار کنتـرل بـا شـرایط داده شده که مقدار تابع هزینه J را به حداقل برساند.

درابتدا ما توابع مجهول وضعیت وکنترل را با توابع کاردینال بسط می‌دهیم که در آن‌ها بردار ضرایب مجهول هستند و در روند حل مسـألهٔ بایسـتی بـه‌دسـت بیـاوریم. همچنـین مـاتریس‌هـای $W(t),K(t),G(t),Q(t),R(t),Z(t)$ و بردارهـای داده شـده $X_0,U_0,\phi(t),\theta(t)$ را با توابع کاردینال هرمیت بسط می‌دهـیم. اکنون هر یک از عناصر توابع بردارهـای وضـعیت و کنتـرل را بـه شکل زیرتقریب می‌دهیم:

$$x_i(t)=\psi(t)^T X_i\,, \qquad i=1,\dots,n,$$

$$u_j(t)=\psi(t)^T U_j\,, \qquad j=1,\dots,m.$$

در نهایت رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&X(t)=\psi_1^T(t)X, \\
&U(t)=\psi_2^T(t)U,
\end{aligned}
\qquad (۵)
$$

که در رابطه فـوق، $\psi_1(t)=I_n\otimes\psi(t)$ و $\psi_2(t)=I_m\otimes\psi(t)$ ماتریس‌های گسترش یافته در ابعـاد مسـألهٔ هسـتند و $\otimes$ نمـاد ضرب کرونکر است [۱۹]. همچنین بردار ضرایب X و U نیز بـه فرم زیر می‌باشند:

$$X=[X_1,\ X_2\ ,\ \dots ,X_n],$$

$$U=[U_1,\ U_2\ ,\ \dots ,U_m].$$

اکنون مـاتریس‌هـای $W(t),K(t),G(t),Z(t)$ را نیـز بـا توابع کاردینال هرمیت بسط می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
W(t)&=[W_{10},W_{11},\dots,W_{12^M},\dots,W_{40},W_{41},\dots,W_{42^M}]^T\psi_1(t) \\
&=W^T\psi_1(t), \\
K(t)&=[K_{10},K_{11},\dots,K_{12^M},\dots,K_{40},K_{41},\dots,K_{42^M}]^T\psi_1(t) \\
&=K^T\psi_1(t), \\
G(t)&=[G_{10},G_{11},\dots,G_{12^M},\dots,G_{40},G_{41},\dots,G_{42^M}]^T\psi_2(t) \\
&=G^T\psi_2(t), \\
Z(t)&=[Z_{10},Z_{11},\dots,Z_{12^M},\dots,Z_{40},Z_{41},\dots,Z_{42^M}]^T\psi_2(t) \\
&=Z^T\psi_2(t).
\end{aligned}
\qquad (۶)
$$

در ادامه بردار وضعیت تأخیری را بسط می‌دهیم:

$$
X(t-\upsilon)=\begin{cases}\phi(t-\upsilon), & 0\le t<\upsilon,\\ X(t-\upsilon), & \upsilon\le t\le t_f,\end{cases}
$$

با استفاده از ماتریس تأخیری (۴) برای بردار وضعیت داریم:

$$
X(t-\upsilon)=\begin{cases}\psi_1^T(t)E_1, & 0\le t<\upsilon,\\ \psi_1^T(t)\hat{D}_1X, & \upsilon\le t\le t_f.\end{cases}
\qquad (۷)
$$

به‌طور مشابه برای بردار کنترل تأخیری داریم:

$$
U(t-\mu)=\begin{cases}\psi_2^T(t)E_2, & 0\le t<\mu,\\ \psi_2^T(t)\hat{D}_2U, & \mu\le t\le t_f,\end{cases}
\qquad (۸)
$$

که در آن:

$$\hat{D}_1=I_n\otimes D_{\upsilon}\ ,\ \hat{D}_2=I_m\otimes D_{\mu}.$$

برای بردار دلخواه V، ضرب دو بردار کاردینال هرمیت را به شکل زیر تقریبی می‌زنیم که در آن $\tilde{V}$ ماتریس عملیاتی حاصل‌ضـرب می‌باشد و در حل مسأله نقش مهمی ایفاء می کند:

$$V^T\psi_i(t)\psi_i^T(t)\approx\psi_1^T(t)\tilde{V}, \qquad i=1,2. \qquad (۹)$$

در نهایـت بـا اسـتفاده از رابطـه‌هـای (۵)، (۶) و (۹) بـه‌دست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
&W(t)X(t)=W^T\psi_1(t)\psi_1^T(t)X=\psi_1^T(t)\tilde{W}^TX, \\
&G(t)U(t)=G^T\psi_2(t)\psi_2^T(t)U=\psi_1^T(t)\tilde{G}^TU.
\end{aligned}
\qquad (۱۰)
$$

در ادامه مانند رابطه (۱۰) برای وضعیت تأخیری با استفاده از رابطه (۷) داریم:

$$I^{\alpha}K(s)X(s-\upsilon)=\begin{cases}\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{K}^TE_1, & 0\le t<\upsilon,\\ \psi_1^T(t)S\tilde{K}^TE_1+\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{K}^T\hat{D}_1^TX, & \upsilon\le t\le t_f,\end{cases} \quad (۱۱)$$

که در آن، $\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\nu}\frac{\psi_1^T(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds=\psi_1^T(t)S$ یک تقریب برای انتگرال کسری است و $\hat{P}_1=I_n\otimes P$ ماتریس عملیاتی انتگرال کسری است. همچنین برای بردار کنترل داریم:

$$I^{\alpha}Z(s)U(s-\mu)=\begin{cases}\psi_1^T(t)\hat{P}_2^T\tilde{Z}^TE_2, & 0\le t<\mu,\\ \psi_1^T(t)M\tilde{Z}^TE_2+\psi_1^T(t)\hat{P}_2^T\tilde{Z}^T\hat{D}_2^TU, & \mu\le t\le t_f,\end{cases} \quad (۱۲)$$

که در آن، $\hat{P}_2=I_m\otimes P$ ماتریس‌های عملیاتی انتگرال کسری در ابعاد مسأله است و

$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\mu}\frac{\psi_2^T(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds=\psi_1^T(t)M$ نیز همانند قبل تقریب انتگرال می‌باشد.

اکنون با اعمال انتگرال کسری در شرط مشتق کسری مسأله به رابطه (۱۳) می‌رسیم:

$$X(t)-X(0)=I^{\alpha}(W(t)X(t)+K(t)X(t-\upsilon)+G(t)U(t)+Z(t)U(t-\mu)),\quad 0\le t\le t_f. \quad (۱۳)$$

حال با در نظر گرفتن $X(0)=\psi_1^T(t)F$ و با جایگذاری روابط (۱۲-۶) در رابطه (۱۳) داریم:

$$\begin{aligned}\psi_1^T(t)X-\psi_1^T(t)F&=\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{W}^TX+\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{K}^TE_1\\&+\psi_1^T(t)S\tilde{K}^TE_1+\psi_1^T(t)\hat{P}_1^T\tilde{K}^T\hat{D}_1^TX\\&+\psi_1^T(t)\hat{P}^T\tilde{G}^TU+\psi_1^T(t)\hat{P}_2^T\tilde{Z}^TE_2\\&+\psi_1^T(t)M\tilde{Z}^TE_2+\psi_1^T(t)\hat{P}_2^T\tilde{Z}^T\hat{D}_2^TU.\end{aligned}$$

لذا داریم:

$$\begin{aligned}B=F&+(-I+\hat{P}_1^T\tilde{W}^T++\hat{P}_1^T\tilde{K}^T\hat{D}_1^T)X+\hat{P}_1^T\tilde{K}^TE_1\\&+S\tilde{K}^TE_1+(\hat{P}^T\tilde{G}^T+\hat{P}_2^T\tilde{Z}^T\hat{D}_2^T)U\\&+\hat{P}_2^T\tilde{Z}^TE_2+M\tilde{Z}^TE_2=0.\end{aligned} \quad (۱۴)$$

علاوه بر این، با جایگزینی تقریب‌های معرفی شده (۵) در تابع هزینه، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}J=&\frac{1}{2}X^T\psi_1(t_f)N\psi_1^T(t_f)X+\\&\frac{1}{2}X^T\left[\int_0^{t_f}\psi_1(t)Q(t)\psi_1^T(t)dt\right]X+\\&\frac{1}{2}U^T\left[\int_0^{t_f}\psi_2(t)R(t)\psi_2^T(t)dt\right]U.\end{aligned}$$

در حال حاضر مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری به یک مسأله بهینه سازی تبدیل شده است. بنابراین، طبق آنچه ذکر شد، هدف یافتن بردار ضرایب X و U است به‌طوری‌که رابطه زیر را حداقل کند:

$$J^*(X,U,\lambda)=J(X,U)+\lambda^TB,$$

که در آن، λ بردار ضرایب لاگرانژ است. برای به‌دست آوردن پاسخ رابطه فوق بایستی سیستم معادلات جبری زیر را با استفاده از روش تکراری نیوتن حل کنیم:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial X}J^*(X,U,\lambda)=0,\\&\frac{\partial}{\partial U}J^*(X,U,\lambda)=0,\\&\frac{\partial}{\partial \lambda}J^*(X,U,\lambda)=0.\end{aligned}$$

در حالت خاص، اگر $Q(t)=k$ و $R(t)=k'$ عدد ثابت و بعد مسأله $M=N=1$ باشد، تابع هزینه به شکل زیر ظاهر می‌گردد:

$$J=\frac{1}{2}X^T\psi(t_f)N\psi^T(t_f)X+\frac{k}{2}X^T\left[\int_0^{t_f}\psi(t)\psi^T(t)dt\right]X+\frac{k'}{2}U^T\left[\int_0^{t_f}\psi(t)\psi^T(t)dt\right]U.$$

که با استفاده از رابطه (۱) داریم:

$$J=\frac{1}{2}X^T\psi(t_f)N\psi^T(t_f)X+\ \frac{k}{2}X^TAX+\frac{k'}{2}U^TAU.$$

۴- مثال‌ها

مثال ۱. مسأله کنترل بهینه زیر با شرایط تأخیری در تابع وضعیت و کنترل را در نظر می‌گیریم [۱۹]:

$$\min\ J=\frac{1}{2}\int_0^1\left[x^2(t)+\frac{1}{2}u^2(t)\right]dt,$$

با شرایط

$$D^{\alpha}x(t)=-x(t)+x(t-\frac{1}{3})+u(t)+\frac{1}{2}u(t-\frac{2}{3}),$$

$$x(t)=1, \quad -\frac{1}{3}\le t\le 0,$$

$$u(t)=0, \quad -\frac{2}{3}\le t\le 0.$$

که در آن $\phi(t)=1$ و $\theta(t)=0$ می‌باشد. در ابتدا تابع وضعیت و تابع کنترل را با توابع کاردینال هرمیت بسط می‌دهیم و ماتریس عملیاتی تأخیری را برای مقادیر $\upsilon=\frac{1}{3}$ و $\mu=\frac{2}{3}$ بدست می‌آوریم:

$$\psi(t-\frac{1}{3})=D_{\frac{1}{3}}\psi(t),$$
$$\psi(t-\frac{2}{3})=D_{\frac{2}{3}}\psi(t),$$

با استفاده از رابطه (۱۱) داریم:

$$I^{\alpha}x(s-\frac{1}{3})ds=\begin{cases} E_1^T P\psi(t), & 0\le t\le \frac{1}{3}, \\ M^T P\psi(t)+X^T D_{\frac{1}{3}}P\psi(t), & \frac{1}{3}\le t\le 1. \end{cases}$$

همانند تقریب فوق برای تأخیر در بردار کنترل داریم:

$$I^{\alpha}u(s-\frac{2}{3})ds=\begin{cases} 0, & 0\le t\le \frac{2}{3}, \\ U^T D_{\frac{2}{3}}P\psi(t), & \frac{2}{3}\le t\le 1. \end{cases}$$

حال با استفاده از روابط بالا و رابطه (۱۴) شرط زیر را برای مینیمم کردن تابع هزینه بدست می‌آوریم:

$$B=X^T(I+P-D_{\frac{1}{3}}P)-U^T(P-\frac{1}{2}D_{\frac{2}{3}}P)-(E_1^T P+F^T+M^T P).$$

در نهایت تابع هزینه به شکل زیر است:

$$J^*=\frac{1}{2}[X^T AX+\frac{1}{2}U^T AU]+\lambda[X^T(I+P-D_{\frac{1}{3}}P)-U^T(P-\frac{1}{2}D_{\frac{2}{3}}P)-(E_1^T P+F^T+M^T P)]$$

مقدار تقریبی تابع هزینه برای $\alpha=1$ و با M=1 و M=2 در جدول (۱) نمایش داده شده و با روش‌های ارائه شده در [۱۱،۱۲،۱۳،۱۹] مقایسه شده است. همچنین در جدول (۲) نیز پاسخ مسأله برای $\alpha=0.8$ و با M=1 و M=0 نشان داده شده و با روش‌های [۱۳ و ۱۱] مقایسه شده است.

جدول (۱): مقدار تقریبی **J** برای $\alpha=1$ در مثال۱

J	روش‌ها
	روش [۱۹]
۰/۳۷۳۱۱۲۵۳	M=۵
۰/۳۷۳۱۱۲۴۱	M=۶
	روش [۱۲]
۰/۱۰۹۵	M=۵
۰/۱۰۲۷	M=۶
۰/۳۷۳۱۱۲۶۴	روش [۱۳]
۰/۰۱۴۵۱	روش [۱۱]
	روش حاضر
۰/۰۲۵۳۶۴۰۲	M=۱
۰/۰۱۲۱۳۸۷۱	M=۲

جدول (۲): مقدارتقریبی **J** برای $\alpha=0.8$ در مثال۱

J	روش‌ها
	روش [۱۳]
۰/۳۵۵۱۲۹۱	M=۳
۰/۳۵۵۱۱۸۵	M=۶
۰/۰۲۳۸۵	روش [۱۱]
	روش حاضر
۰/۱۰۷۱۳۲۵	M=۰
۰/۰۸۳۲۰۱۴	M=۱

مثال ۲. در این مثال می‌خواهیم تابع وضعیت و تابع کنترل را طوری پیدا کنیم که عملکرد تابع هدف[۲۰]:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^1[x^2(t)+u^2(t)]dt,$$

با شرایط:

$$D^{\alpha}x(t)=-x(t)+u(t)-\frac{1}{2}u(t-\frac{2}{3}), \qquad 0\le t\le 1$$

$$x(0)=1,$$

$$u(t)=0, \quad -\frac{2}{3}\le t\le 0.$$

را به حداقل برساند.

در ابتدا ماتریس عملیاتی تأخیری را به‌دست می‌آوریم:

$$\psi(t-\frac{2}{3}) = D_{\frac{2}{3}}\psi(t).$$

با استفاده از رابطه (۱۲) برای بردار کنترل تأخیری داریم:

$$I^{\alpha}u(s-\frac{2}{3})ds = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{2}{3}, \\ U^T D_{\frac{2}{3}} P\psi(t), & \frac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

اکنون رابطه (۱۴) برای کمینه کردن تابع هزینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$B = F + X^T(-I-P) + U^T(P - \frac{1}{2}D_{\frac{2}{3}}P).$$

که در آن، $X(0) = 1 = F^T\psi(t)$ و P ماتریس عملیاتی انتگرال کسری می‌باشد. تابع هزینه نیز به شکل زیر حاصل می‌گردد:

$$J^* = \frac{1}{2}[X^T AX + U^T AU] + \lambda[X^T(-I-P) + U^T(P - \frac{1}{2}D_{\frac{2}{3}}P) + F].$$

نتایج به‌دست‌آمده برای مقادیر J در جدول (۳) نشان داده شده است.

جدول (۳): مقدار تقریبی **J** برای $\alpha = 1$ درمثال ۲

روش‌ها	**J**
روش [۲۰]	
M=۴	۰/۱۹۵۴۹۴۳۳۹۱۳۶
M=۵	۰/۱۹۵۴۹۴۳۳۹۱۳۶
M=۶	۰/۱۹۵۴۹۴۳۳۹۱۳۶
روش حاضر	
M=۱	۰/۰۳۷۸۹۱۶۴۱۳۳۱
M=۲	۰/۰۳۲۹۹۹۳۸۹۳۸۵
M=۳	۰/۰۲۸۶۵۱۵۹۸۷۲۲

جدول (۴): مقدار تقریبی **J** برای $\alpha = 1$ در مثال۳

روش‌ها	**J**
روش [۱۳]	۱/۶۴۷۸۷۴۱۹
روش [۱۲]	۰/۳۰۴۸
روش [۱۱]	۰/۴۷۲۷۴۶۴
روش حاضر	۰/۰۶۰۵۴۶۳

جدول (۵): مقدار تقریبی **J** برای $\alpha = 0.9$ در مثال۳

روش‌ها	**J**
روش [۱۳]	۱/۶۲۴۸۷۸۵
روش [۱۱]	۰/۵۰۲۱۹۰۰
روش حاضر	۰/۲۰۰۰۴۱

مثال۳. تابع وضعیت و کنترل را طوری می‌یابیم که تابع[۱۳]:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^2 (u(t)^2 + x(t)^2)dt,$$

با شرایط:

$$D^{\alpha}x(t) = u(t) + x(t-1), \quad 0 \le t \le 2, 0 \le \alpha < 1,$$

$$x(t) = 1, \quad -1 \le t < 0,$$

حداقل گردد. در این مثال ابتدا با تغییر متغیر $t = 2s$ بازه $[0,2]$ را به $[0,1]$ انتقال می دهیم. بنابراین مسأله فوق به شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$J = \int_0^1 (u(s)^2 + x(s)^2)ds,$$

با شرایط:

$$D^{\alpha}x(s) = 2(u(s) + x(s-\frac{1}{2})), \quad 0 \le s \le 1, \ 0 \le \alpha < 1,$$

$$x(s) = 1, \quad -\frac{1}{2} \le s \le 0,$$

نتایج به‌دست‌آمده برای $\alpha = 1$ در جدول (۴) و $\alpha = 0.9$ در جدول (۵) و $\alpha = 0.7$ در جدول (۶) نشان داده شده است. با مقایسه نتایج به‌دست‌آمده با توابع کاردینال هرمیت با سایر روش‌ها به این نتیجه می‌رسیم که پاسخ به‌دست‌آمده دارای دقت مناسبی است.

جدول (۶): مقدار تقریبی **J** برای $\alpha = 0.7$ در مثال ۳

روش‌ها	**J**
روش [۱۳]	۱/۵۵۱۹۸۵۹
روش حاضر	۰/۰۳۱۰۰۷

۵- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، یک روش کارآمد و با تقریب مناسب برای حل یک گروه گسترده از مسائل کنترل بهینه کسری تأخیری ارائه شده است. برای حل از توابع کاردینال هرمیت به‌عنوان پایه استفاده کرده ایم. ماتریس عملیاتی انتگرال کسری همراه با ماتریس عملیاتی تأخیری برای حل مسأله کنترل بهینه کسری تأخیری استفاده شده است که با استفاده از آن‌ها، مسأله به یک مجموعه معادلات جبری تبدیل می‌شود. نتایج به‌دست آمده از روش ارائه شده در مثال‌ها نشان می‌دهد که روش کارآمد است.

۶- مراجع

[1] D.A. Benson, M.M. Meerschaert, J. Revielle, "Fractional calculus in hydrologicmodeling: a numerical perspective," Adv. Water Resour, vol.51, pp.479–497, 2013.

[2] J.K. Popovic, D.T. Spasic, J. Tosic, J.L Kolarovic, R. Malti, "Fractional model for pharmacokinetics of high dose methotrexate in children with acute lymphoblastic leukaemia," Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. , vol.22, pp.451–471, 2015.

[3] D. Sierociuk, A. Dzielinski, G. Sarwas, I. Petras, I. Podlubny, T. Skovranek, " Modelling heat transfer in heterogeneous madia using fractional calculus,"Phil. Trans. R. Soc. A., vol.371, pp.2013-2046, 2013.

[4] S. Larsson, M. Racheva, F. Saedpanah, "Discontinuous Galerkin method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticity," Comput. Method. Appl. Mech. Eng., vol.283, pp.196–209, 2015.

[5] Y. Jiang, X. Wang, "On a stochastic heat equation with first order fractional noises and applications to finance," J. Math. Anal. Appl., vol.396, pp. 656–669, 2012.

[6] G. Bohannan, "Analog fractional order controller in temperature and motor control applications," J. Vib.Contr., vol.14, pp.1487–1498, 2008.

[7] O.P. Agrawal, "A formulation and numerical scheme for fractional optimal control problems," J. Vib. Control, vol.14, pp.1291–1299, 2008.

[8] A. Lotfi, S.A Yousefi, M. Dehghan, "Numerical solution of a class of fractional optimal control problems via the Legendre orthonormal basis combined with the operationalmatrix and the Gauss quadrature rule," J. Comput. Appl Math., vol.250, pp.143–160, 2013.

[9] O.P. Agrawal, "Fractional optimal control of a distributed system using eigenfunctions," ASME. J. Comput. Nonlinear Dyn, vol.3, pp.2- 6, 2008.

[10] M. Jamshidi, C.M. Wang, "A computational algorithm for large-scale nonlinear time-delay systems," IEEE Trans Syst Man Cybern., vol.14, pp.2–9, 1984.

[11] AH. Bhrawy, SS. Ezz-Eldien, "A new Legendre perational technique for delay fractional optimal control problems," Calcolo, vol.53(4), pp. 521–543, 2016.

[12] P. Rahimkhani, Y. Ordokhani, E. Babolian, "An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems," Nonlinear Dynamics, vol.86(3), pp.1649–1661, 2016.

[13] L. Moradi, F. Mohammadi, D. Baleanu, "A direct numerical solution of time-delay fractional optimal control problems by using Chelyshkov wavelets," J. Vib.Contr., vol.25, pp.1–15, 2018.

[14] K. Rabiei, Y. Ordokhani, E. Babolian, "Fractional-order Boubaker functions and their applications in solving delay fractional optimal control problems". J. Vib.Contr, vol.24, pp.3370-3383, 2018.

[15] E. Safaie, MH Farahi, MF Ardehaie, "An approximate method for numerically solving multi-dimensional delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials," Comput. Appl. Math., vol.34, pp.831–846, 2015.

[16] B. Han, Q. Jiang, "Multiwavelets on the interval,"Appl. Comput. Harmon. Anal, vol. 12, pp. 100–127, 2002.

[17] E. Keshavarz, Y. Ordokhani, M. Razzaghi, "Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations,"Appl. Math. Model., vol.38(24), pp.6038–6051 2014.

[18] E. Ashpazzadeh, M. Lakestani, M. Razzaghi, "Nonlinear Constrained Optimal Control Problems and Cardinal Hermite Interpolant Multiscaling Functions," Asian. J. Control., vol. 20, pp. 558–567, 2018.

[19] H.R Marzban, M. Razzaghi, "Optimal control of linear delay systems via hybrid of block-pulse and Legendre polynomials," J. Frankl. Inst., vol.341, pp.279–293, 2004.

[20] M.H. Farahi, M. Dadkhah, "Solving nonlinear time delay control systems by Fourier series," Int. J. Eng. Res. Appl., vol.5, pp.217–226, 2014.