

## تعیین ضریب نفوذ حرارتی و منبع گرمایی مجهول در یک مسأله‌ی معکوس سهموی

مهناز حامدی چرمخوران\*<sup>۱</sup>، علی‌مردان شاه‌رضایی<sup>۲</sup>، ترانه تجویدی<sup>۳</sup>.

۱- دانشجوی دکتری گروه ریاضی دانشگاه الزهرا (س)، تهران، ایران

۲- دانشیار گروه ریاضی دانشگاه الزهرا (س)، تهران، ایران

۳- استادیار گروه ریاضی دانشگاه الزهرا (س)، تهران، ایران

### چکیده

مسائل معکوس سهموی نقش بسیار مهمی در مدل‌سازی مسائل کاربردی به ویژه در علوم پایه، فنی-مهندسی و بسیاری از شاخه‌های علوم فیزیکی و تکنولوژی دارند. هدف از این مقاله حل این دسته از مسائل با یک تقریب تفاضل متناهی است. با به کارگیری روش اویلر پسرو، تقریب پایداری برای ضریب نفوذ حرارتی و منبع گرمایی مجهول در مسأله‌ی معکوس سهموی از شرایط فوق‌اضافی به دست می‌آوریم که در آن ضریب نفوذ حرارتی و منبع گرمایی هر دو تنها وابسته به زمان هستند. در پایان برای نشان دادن کارایی و دقت روش بیان شده یک مثال عددی در مقاله مطرح و بحث شده‌است.

**کلمات کلیدی:** مسأله‌ی معکوس، روش تفاضل متناهی اویلر، ضریب نفوذ حرارتی، منبع گرمایی

### ۱. مقدمه

مسائل معکوس سهموی به عنوان مدل، در بسیاری از شاخه‌های فیزیک و مهندسی از جمله در مطالعه‌ی ترموالاستیک، انتشار شیمیایی، نظریه کنترل، دینامیک جمعیت، دینامیک راکتور هسته‌ای، بیوشیمی و علوم پزشکی استفاده می‌شوند [1]. مسائل معکوس در سیستم‌های انتقال حرارتی شامل هدایت، جابجایی و تابش کاربرد دارند [2]. برای مثال در انتقال حرارت تشعشعی (تابش) در شناسایی منبع توزیع تابش که در طیف گسترده‌ای از مسائل در کنترل حرارتی، فناوری فضایی، احتراق، استفاده از انرژی خورشیدی، موتورهای با درجه حرارت بالا، تکنولوژی کوره مورد استفاده‌است، به کار می‌رود [3]. مسأله‌ی هدایت گرمایی معکوس، در مدل بندی و کنترل فرآیندهای با انتشار گرما در ترموفیزیک و مکانیک محیط‌های پیوسته کاربرد دارد. این کاربرد زمانی است که بخواهیم دما و شار گرمای نقاط غیرقابل دسترس صفحه را با اندازه‌گیری بخش‌های قابل دسترس از دامنه به دست آوریم [4,5].

\*Corresponding author: [m.hamed@alzahra.ac.ir](mailto:m.hamed@alzahra.ac.ir)

مسئله‌ی معکوس مقدار اولیه-کرانه‌ای:

$$\begin{aligned} u_t &= a(t)u_{xx} + f(t); & 0 < x < 1, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= \phi(x); & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \mu_1(t); & 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) &= \mu_2(t); & 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (1)$$

همراه با شرایط فوق اضافی:

$$u(x^*, t) = E(t); \quad 0 \leq t \leq T, \quad E(t) \neq 0, \quad (2)$$

$$u(x^{**}, t) = F(t); \quad 0 \leq t \leq T, \quad F(t) \neq 0, \quad (3)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن  $T > 0$  زمان نهایی،  $x^*, x^{**} \in (0, 1)$  مکان‌هایی از سنسورهای داخلی هستند که اندازه‌گیری‌های دما را ثبت می‌کنند و  $\phi, \mu_1, \mu_2, E$  و  $F$  توابعی پیوسته است.

هدف از حل مسئله‌ی (1)–(3) پیدا کردن توابع مجهول  $u(x, t)$ ،  $a(t)$  و  $f(t)$  است که  $u$  نشان دهنده‌ی درجه حرارت، تابع ناشناخته‌ی  $f(t)$  به عنوان منبع ماده در شیمی و منبع گرما در زیست شیمی در نظر گرفته می‌شود یا می‌توان آن را به عنوان عکس‌العمل نیز تفسیر کرد که در این مقاله آن را به عنوان منبع گرمایی در نظر می‌گیریم و ضریب  $a(t)$  مربوط به خواص فیزیکی مانند رسانایی یک وسیله یا ضریب نفوذ حرارتی است [6]. با جایگذاری  $x^{**}$  در (1) داریم:

$$u_t(x^{**}, t) = a(t)u_{xx}(x^{**}, t) + f(t), \quad (4)$$

که با استفاده از شرط از (3)، مقدار  $f(t)$  به صورت:

$$f(t) = F'(t) - a(t)u_{xx}(x^{**}, t), \quad (5)$$

به دست می‌آید. با جایگذاری مقدار  $f(t)$  در (1) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= a(t)(u_{xx}(x, t) - u_{xx}(x^{**}, t)) + F'(t); & 0 < x < 1, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= \phi(x); & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \mu_1(t); & 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) &= \mu_2(t); & 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (6)$$

برای تبدیل مسئله‌ی بالا به مساله‌ای با یک مجهول به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$u_t(x^*, t) = a(t)(u_{xx}(x^*, t) - u_{xx}(x^{**}, t)) + F'(t); \quad (7)$$

که با استفاده از (2) داریم:

$$a(t) = \frac{l'(t)}{u_{xx}(x^*, t) - u_{xx}(x^{**}, t)}, \quad (8)$$

که در آن  $l(t) = E(t) - F(t)$  و  $u_{xx}(x^*, t) \neq u_{xx}(x^{**}, t)$  است. با جایگذاری مقدار  $a(t)$  در مسئله‌ی (6) به مسئله‌ی زیر می‌رسیم که هم ارز مسئله‌ی (1)–(3) است.

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= \frac{l'(t)}{u_{xx}(x^*, t) - u_{xx}(x^{**}, t)}(u_{xx}(x, t) - u_{xx}(x^{**}, t)) + F'(t); & 0 < x < 1, & 0 < t < T, \\ u(x, 0) &= \phi(x); & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) &= \mu_1(t); & 0 \leq t \leq T, \\ u(1, t) &= \mu_2(t); & 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (9)$$

حال با تغییر متغیر:

$$v(x, t) = u_{xx}(x, t), \quad (10)$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 v_t(x, t) = u_{xxt}(x, t) = u_{txx}(x, t) &= \left( \frac{l'(t)}{u_{xx}(x^*, t) - u_{xx}(x^{**}, t)} (u_{xx}(x, t) - u_{xx}(x^*, t)) + F'(t) \right)_{xx} \\
 &= \frac{l'(t)}{u_{xx}(x^*, t) - u_{xx}(x^{**}, t)} u_{xxxx}(x, t) \\
 &= \frac{l'(t)}{u_{xx}(x^*, t) - u_{xx}(x^{**}, t)} v_{xx}(x, t),
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$v(x, 0) = u_{xx}(x, 0) = \phi_{xx}(x), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 v(0, t) = u_{xx}(0, t) &= \frac{u_{xx}(x^*, t) - u_{xx}(x^{**}, t)}{l'(t)} u_t(0, t) + u_{xx}(x^{**}, t) - \frac{u_{xx}(x^*, t) - u_{xx}(x^{**}, t)}{l'(t)} F'(t) \\
 &= \frac{v(x^*, t) - v(x^{**}, t)}{l'(t)} \mu_1'(t) + v(x^{**}, t) - \frac{v(x^*, t) - v(x^{**}, t)}{l'(t)} F'(t) \\
 &= \frac{v(x^*, t) - v(x^{**}, t)}{l'(t)} (\mu_1'(t) - F'(t)) + v(x^{**}, t).
 \end{aligned} \tag{13}$$

با استفاده از روابط (11)، (12) و (13)، مسأله‌ی (9) به مسأله‌ی:

$$\begin{aligned}
 v_t &= \frac{l'(t)}{v(x^*, t) - v(x^{**}, t)} v_{xx}; \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \\
 v(x, 0) &= \phi_{xx}(x); \quad 0 \leq x \leq 1,
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$v(0, t) - v(x^{**}, t) = \frac{g_1'(t)}{l'(t)} (v(x^*, t) - v(x^{**}, t)); \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$v(1, t) - v(x^{**}, t) = \frac{g_2'(t)}{l'(t)} (v(x^*, t) - v(x^{**}, t)); \quad 0 \leq t \leq T,$$

تبدیل می‌شود که در آن:

$$g_1(t) = \mu_1(t) - F(t), \tag{15}$$

$$g_2(t) = \mu_2(t) - F(t),$$

است و تحت تغییر متغیر (10) داریم:

$$a(t) = \frac{l'(t)}{v(x^*, t) - v(x^{**}, t)}, \tag{16}$$

$$f(t) = F'(t) - a(t)v(x^{**}, t). \tag{17}$$

حال فرض کنیم شرایط زیر در مقاله برقرار باشند:

فرض  $A_1$ : فرض کنیم  $\phi(x) \in C^{4+\alpha}[0, 1]$  با  $\phi_{xx}(x) > 0$  و  $\phi_{xxxx}(x) > 0$  بر  $[0, 1]$ .

فرض  $A_2$ : فرض کنیم  $g_1(t), g_2(t)$  و  $l(t)$  عضو  $C^{k+\frac{\alpha}{2}}[0, T]$  باشند و بعلاوه  $l'(t) > 0$  بر  $[0, T]$  و

$$0 < \frac{g_1'(t)}{l'(t)} < 1, \quad 0 < \frac{g_2'(t)}{l'(t)} < 1, \quad 0 < \frac{g_1'(t)}{l'(t)} > 0 \quad \text{و} \quad \left( \frac{g_2'(t)}{l'(t)} \right)' > 0 \quad \text{بر} \quad [0, T].$$

قضیه 1.1. تحت فرض‌های  $A_1$  و  $A_2$ ، مسأله‌ی (1) - (3) دارای جواب یکتای  $(u(x, t), a(t), f(t))$  در  $0 < t < T$  و

$0 < x < 1$  برای هر  $T > 0$  است و برای مسأله‌ی (14) داریم:

$$0 < \phi_{xx}(x) \leq v(x, t) \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \phi_{xx}(x); \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T.$$

اثبات. برای اثبات می‌توان به مراجع [7, 8] مراجعه نمود.

در بخش بعدی روش اویلر پسرو و به کارگیری آن برای حل مسأله‌ی (14) بیان خواهد شد، در بخش ۳ همگرایی روش و تخمین خطا برای  $u$ ،  $a$  و  $f$  مطرح می‌شود و در نهایت نتایج عددی در بخش ۴ ارائه و بحث می‌شوند.

## ۲. روش اویلر پسرو برای به‌دست آوردن $v$ در مسأله‌ی (9)

فرض کنیم  $M$  و  $N$  اعداد صحیح مثبت و

$$h = \Delta x = \frac{1}{N}, \quad x_i = ih; \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

$$\tau = \Delta t = \frac{T}{M}, \quad t_n = n\tau; \quad n = 0, 1, \dots, M.$$

برای تابع هموار  $p(x) \in C^2[0, 1]$  از بسط تیلور داریم:

لم ۱، ۲. فرض کنیم  $p(x) \in C^2[0, 1]$  و  $i_0$  طوری باشد که  $x^* \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}]$  پس می‌یابیم:

$$p(x^*) = \frac{h - \delta_{x^*}}{h} p(x_{i_0}) + \frac{\delta_{x^*}}{h} p(x_{i_0+1}) + O(h^2),$$

که در آن  $\delta_{x^*} = x^* - x_{i_0}$  است.

حال روش تفاضل متناهی اویلر پسرو برای به‌دست آوردن  $v_{i,n}$  به عنوان تقریبی از  $v(x_i, t_n)$  به صورت:

$$\frac{v_{i,n} - v_{i,n-1}}{\tau} = \frac{H_n}{v_{*,n-1} - v_{**,n-1}} \frac{v_{i+1,n} + v_{i-1,n} - 2v_{i,n}}{h^2}; \quad i = 1, \dots, N-1, \quad n \geq 1,$$

$$v_{i,0} = \phi_{xxi}; \quad i = 0, \dots, N, \quad (18)$$

$$v_{0,n} - v_{**,n} = G_{0,n} (v_{*,n-1} - v_{**,n-1}); \quad n \geq 1,$$

$$v_{N,n} - v_{**,n} = G_{N,n} (v_{*,n-1} - v_{**,n-1}); \quad n \geq 1,$$

تعریف می‌شود که در آن:

$$v_{*,n} = \frac{h - \delta_{x^*}}{h} v_{i_0,n} + \frac{\delta_{x^*}}{h} v_{i_0+1,n}; \quad x^* \in [x_{i_0}, x_{i_0+1}],$$

$$v_{**,n} = \frac{h - \delta_{x^{**}}}{h} v_{j_0,n} + \frac{\delta_{x^{**}}}{h} v_{j_0+1,n}; \quad x^{**} \in [x_{j_0}, x_{j_0+1}],$$

$$H_n = l'(t_n), \quad (19)$$

$$G_{0,n} = \frac{g_1'(t_n)}{l'(t_n)},$$

$$G_{N,n} = \frac{g_2'(t_n)}{l'(t_n)},$$

است که برای (18)–(19) خطای برشی،  $O(h^2 + \tau)$  است.

## ۳. همگرایی و تخمین خطا برای $u$ ، $a$ و $f$

قضیه ۱,۳. فرض کنیم  $Q_T = \{(x, t); 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ ,  $v \in C^{4,2}(Q_T)$  پس  $h_0 > 0$  و  $\tau_0 > 0$  وابسته به داده‌های  $d' = \max\{x^{**}, 1-x^{**}\}$ ,  $d = \max\{x^*, 1-x^*\}$ ,  $T > 0$  و  $g_2(t)$  و  $g_1(t)$  وجود دارند، به طوری که برای هر  $0 < h < h_0$ ,  $0 < \tau < \tau_0$  یک ثابت مثبت  $c > 0$  وابسته به  $d'$ ,  $d$ ,  $T$ ,  $C^{4,2}$  و نرم  $v$  موجود است که:

$$\max_{i,n} |v(x_i, t_n) - v_{i,n}| \leq c(h^2 + \tau).$$

اثبات. [9]

به منظور بازیابی  $u$  از  $v$ ، مسأله‌ی مقدار کرانه‌ای:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= v(x, t); & 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(1, t) &= \mu_2(t), \end{aligned} \quad (20)$$

که در آن  $t$  همانند یک پارامتر رفتار می‌کند را حل می‌کنیم و از آن  $u(x, t)$  به دست می‌آید. واضح است که یک ثابت مثبت  $C$  غیر وابسته به  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  و  $v$  وجود دارد که

$$|u(x, t)| \leq c \max_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T} \{|\mu_1(t)|, |\mu_2(t)|, |v(x, t)|\} \quad (21)$$

بعد از مشاهده جواب تفاضل متناهی  $v_{i,n}$  برای مسأله‌ی (14)، جواب تفاضل متناهی برای (9) به وسیله‌ی (20) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,n} + u_{i-1,n} - 2u_{i,n}}{h^2} &= v_{i,n}; & 1 \leq i \leq N-1, \quad n \geq 0, \\ u_{0,n} &= \mu_{1,n}; & n \geq 0, \\ u_{N,n} &= \mu_{2,n}; & n \geq 0, \end{aligned} \quad (22)$$

که در آن  $v_{i,n}$  جواب (18)–(19) است. بدین منظور می‌توانیم تخمین زیر را برای تقریبی از  $u(x_i, t_n)$  به دست آوریم:

$$|u_{i,n}| \leq c \max_{0 \leq i \leq N, 0 \leq n \leq M} \{|\mu_{1,n}|, |\mu_{2,n}|, |v_{i,n}|\} \quad (23)$$

از قضیه‌ی ۱,۳ می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه ۲,۳. فرض کنیم جواب یکتای  $(u, a, f)$  از مسأله‌ی (1)–(3) موجود باشد و  $u \in C^{4,2}(Q_T)$  در این صورت  $h_0 > 0$  و  $\tau_0 > 0$  وابسته به داده‌های  $\mu_2, \mu_1, T > 0$  و  $E$  و  $F$  وجود دارد که برای هر  $0 < h < h_0$  و  $0 < \tau < \tau_0$  داریم:

$$|u(x_i, t_n) - u_{i,n}| = O(h^2 + \tau); \quad i = 0, \dots, N, \quad n = 0, \dots, M, \quad (24)$$

در نهایت روابط زیر را به عنوان تقریبی از  $a(t_n)$  و  $f(t_n)$  قرار می‌دهیم:

$$a_n = \frac{l_{n+1} - l_n}{(v_{*,n} - v_{**,n})\tau}; \quad n = 0, \dots, M-1, \quad (25)$$

$$f_n = \frac{F_{n+1} - F_n}{\tau} - a_n v_{**,n}; \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (26)$$

۴. مثال‌های عددی

در این بخش یک مثال عددی را با استفاده از روش بیان شده در بخش‌های قبل حل و نتایج حاصل را ارائه می‌کنیم.

فرض کنیم  $E(u, t_n) = \max_i |u_i^n - u(x_i, t_n)|$  ماکسیمم خطا در هر مرحله برای  $u$ ,

در هر مرحله برای  $a$  و  $E(v, t_n) = \max_i |v_i^n - v(x_i, t_n)|$  ماکسیمم خطا در هر مرحله برای  $v$ ,  $E(a, t_n) = |a_n - a(t_n)|$  ماکسیمم خطا

در هر مرحله برای  $f$  باشد.  $E(f, t_n) = |f_n - f(t_n)|$  ماکسیمم خطا در هر مرحله برای  $f$  باشد.

مثال ۱،۴. در مسأله‌ی (۱) - (۳) فرض کنیم:

$$\phi(x) = e^{\frac{x}{2}},$$

$$\mu_1(t) = \frac{1+2t^3}{1+t^3} + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t^2,$$

$$\mu_2(t) = \frac{\sqrt{e}(1+2t^3)}{1+t^3} + \sqrt{e} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t^2,$$

$$E(t) = \frac{e^{\frac{x^*}{2}}(1+2t^3)}{1+t^3} + e^{\frac{x^*}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t^2,$$

$$F(t) = \frac{e^{\frac{x^{**}}{2}}(1+2t^3)}{1+t^3} + e^{\frac{x^{**}}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t^2,$$

که در آن  $0 \leq x \leq 1$  و  $0 \leq t \leq T$  است. واضح است که جواب دقیق  $u(x, t)$ ،  $a(t)$  و  $f(t)$  به صورت زیر است:

$$u(x, t) = \frac{e^{\frac{x}{2}}(1+2t^3)}{1+t^3} + e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t^2,$$

$$a(t) = \frac{2(6t^2 + (1+t^3)^2 \cos(\frac{t}{2}))}{(1+t^3)(1+2t^3 + (1+t^3) \sin(\frac{t}{2}))},$$

$$f(t) = 2t.$$

حل: مسأله‌ی بالا را با روش ارائه شده حل کردیم و نتایج عددی را در جدول‌های ۱ تا ۴ و شکل‌های ۱ تا ۴ آورده‌ایم. جدول ۱ نشان دهنده‌ی ماکزیمم خطای  $u(x, t)$  و  $v(x, t)$  به ازای مقادیر مختلف  $x^*$ ،  $x^{**}$  برای  $\tau = 0.00125$  و  $h = 0.05$  است.

جدول ۲ نشان دهنده‌ی مقادیر دقیق، تقریبی و مقدار خطای مطلق  $a(t)$  به ازای نقاط مختلف برای  $x^* = 0.4$  و  $x^{**} = 0.6$  است.

جدول ۳ نشان دهنده‌ی مقادیر دقیق، تقریبی و مقدار خطای مطلق  $f(t)$  به ازای نقاط مختلف برای  $x^* = 0.4$  و  $x^{**} = 0.6$  است.

جدول ۴ نشان دهنده‌ی مقدار خطای  $a(t)$  و  $f(t)$  به ازای مقادیر مختلف  $x^*$  و  $x^{**}$  است.

از جدول ۱ و جدول ۴ نتیجه می‌گیریم نتایج عددی وقتی  $x^* = 0.4$  و  $x^{**} = 0.6$  است، دقت بیشتری دارند، خطای  $u(x, t)$  از خطای  $v(x, t)$  کوچک‌تر است و خطای  $f(t)$  نیز از خطای  $a(t)$  کوچک‌تر است.

- شکل ۱ نشان دهنده‌ی خطای  $u(x, 1)$  برای  $\tau = 0.00125$ ،  $h = 0.05$ ،  $x^* = 0.4$  و  $x^{**} = 0.6$  است.
- شکل ۲ نشان دهنده‌ی خطای  $v(x, 1)$  برای  $\tau = 0.00125$ ،  $h = 0.05$ ،  $x^* = 0.4$  و  $x^{**} = 0.6$  است.
- شکل ۳ نشان دهنده‌ی مقادیر دقیق و تقریبی  $a(t)$  برای  $x^* = 0.4$  و  $x^{**} = 0.6$  است.
- شکل ۴ نشان دهنده‌ی مقادیر دقیق و تقریبی  $f(t)$  برای  $x^* = 0.4$  و  $x^{**} = 0.6$  است.

#### جدول ۱ ماکزیمم خطای $u(x,t)$ ، $v(x,t)$ برای مثال ۱،۴

ماکزیمم خطای $v(x, t)$	ماکزیمم خطای $u(x, t)$	$x^{**}$	$x^*$
0.0067	$1.5213 \times 10^{-4}$	0.6	0.4
0.0192	$6.9350 \times 10^{-4}$	0.9	0.1
0.0109	$3.5110 \times 10^{-4}$	0.8	0.2
0.0080	$2.2084 \times 10^{-4}$	0.7	0.3
0.0090	$2.9202 \times 10^{-4}$	0.8	0.7
0.0192	$4.9378 \times 10^{-4}$	0.2	0.1
0.0126	$4.5824 \times 10^{-4}$	0.9	0.8

جدول 2 مقادیر دقیق، تقریبی و خطای  $a(t)$  به ازای نقاط مختلف برای مثال ۱,۴

$a(t)$ خطای	مقدار تقریبی $a(t)$	مقدار دقیق $a(t)$	t
0	2.0000	2.0000	0
0.0015	2.0160	2.0146	0.1
0.0035	2.2263	2.2229	0.2
0.0066	2.5595	2.5529	0.3
0.0112	2.9156	2.9044	0.4
0.0170	3.1883	3.1713	0.5
0.0230	3.3032	3.2802	0.6
0.0275	3.2427	3.2152	0.7
0.0296	3.0397	3.0100	0.8
0.0294	2.7507	2.7213	0.9
0.0276	2.4299	2.4023	1

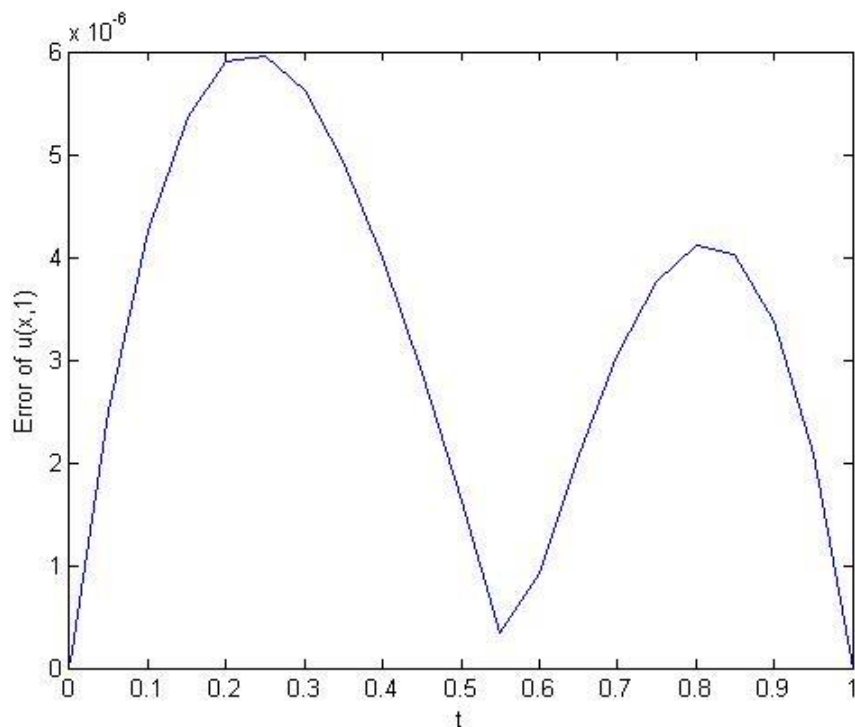


جدول 3 مقادیر دقیق، تقریبی و خطای  $f(t)$  به ازای نقاط مختلف برای مثال ۱,۴

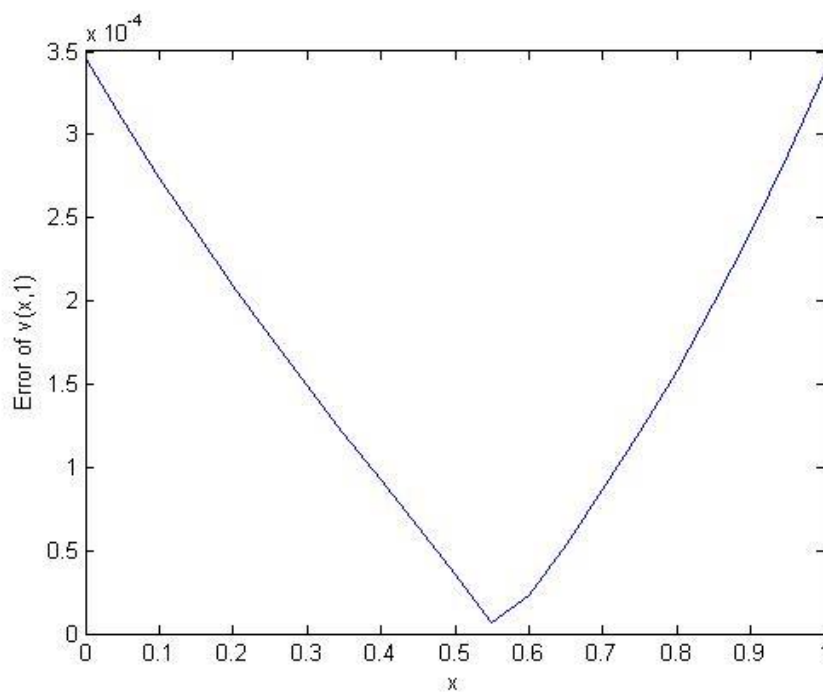
خطای $f(t)$	مقدار تقریبی $f(t)$	مقدار دقیق $f(t)$	t
0	0	0	0
$5.1727 \times 10^{-4}$	0.1995	0.2000	0.1
0.0013	0.3987	0.4000	0.2
0.0026	0.5974	0.6000	0.3
0.0047	0.7953	0.8000	0.4
0.0077	0.9923	1.0000	0.5
0.0113	1.1887	1.2000	0.6
0.0146	1.3854	1.4000	0.7
0.0170	1.5830	1.6000	0.8
0.0181	1.7819	1.8000	0.9
0.0181	1.9819	2.0000	1

جدول 4 ماکزیمم خطای  $f(t)$  و  $a(t)$  برای مثال ۱,۴

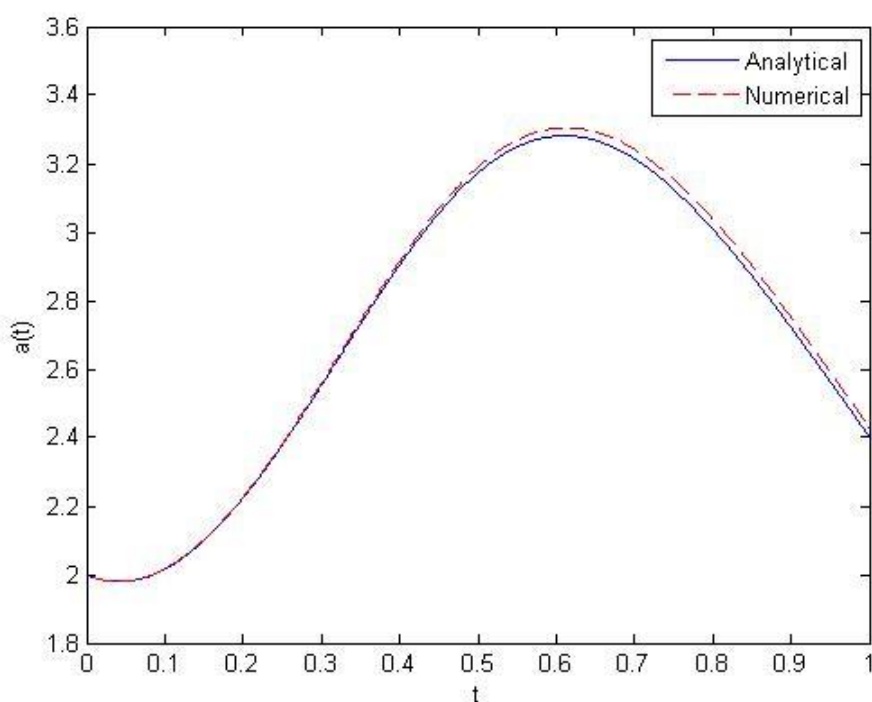
خطای $f(t)$	خطای $a(t)$	$x^{**}$	$x^*$
0.0230	0.0364	0.8	0.7
0.0512	0.0800	0.9	0.1
0.0267	0.0438	0.8	0.2
0.0212	0.0342	0.7	0.3
0.0182	0.0298	0.6	0.4
0.0416	0.0733	0.2	0.1
0.0315	0.0492	0.9	0.8



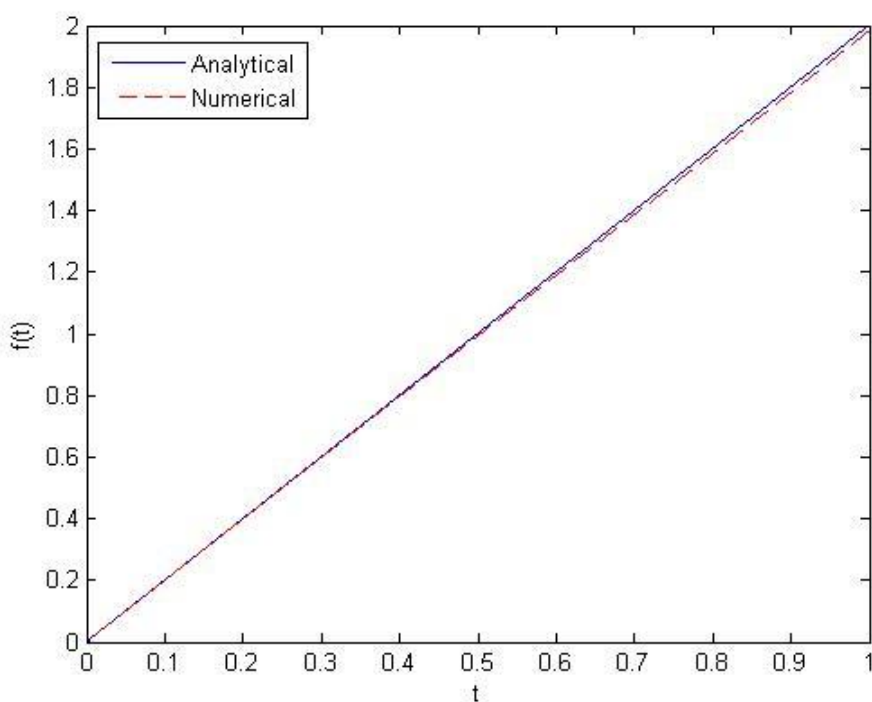
شکل 1 خطای  $u(x,t)$  برای مثال ۱,۴



شکل 2 خطای  $v(x,t)$  برای مثال ۱,۴



شکل 3 مقدار دقیق و تقریبی  $a(t)$  برای مثال ۱,۴



شکل 4 مقدار دقیق و تقریبی  $f(t)$  برای مثال ۱,۴

در مثال‌هایی که توابع مجهول، چند جمله‌ای باشند خطاها بسیار ناچیز هستند.

#### ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله به منظور به‌دست آوردن تقریبی از  $u(x, t)$ ،  $a(t)$  و  $f(t)$  مجهول در یک مسأله‌ی معکوس سهموی روش تفاضل متناهی را به کار بردیم که ابتدا به کمک شرایط فوق‌اضافی و تغییر متغیر توانستیم مسأله‌ی معکوس را به مسأله‌ای با یک مجهول تبدیل کنیم سپس با روش تفاضل متناهی اولی‌ر به حل این مسأله پرداختیم. نتایج عددی نشان می‌دهد که روش بیان شده یک روش مفید و مؤثر برای تقریب جواب بوده‌است و بیانگر کارایی و دقت روش برای حل این نوع از مسائل معکوس است.

#### ۶. مراجع

1. Shidfar, A. and Zolfaghari, R. (2011), "Determination of an unknown function in a parabolic inverse problem by sinc-collocation method," Numer methods Partial Differential Eq **27** (6), pp 1584-1598.
2. Siegel, R. and Howell, J. R. (1992), "Thermal Radiation Heat Transfer," Taylor & Francis, New York, NY, USA, 4th edition.
3. Sarvari, S.M.H., Howell, J.R. and Mansouri, S.H. (2003), "Inverse boundary design conduction-radiation problem in irregular two-dimensional domains," Numerical Heat Transfer B: Fundamentals **44** (3), pp 209-224.
4. Hon, Y. and Wei, T. (2004), "A fundamental solution method for inverse heat conduction problem," Eng. Anal. Bound. Elem. **28**, pp 489-95.
5. Reemtsen, R. and Kirsch, A. (1984), "A method for the numerical solution of the one dimensional inverse Stefan problem," Numer. Math. **45**, pp 253-273.
6. Shahrezaee, A. M. (2013), "A meshless method for solving an inverse time-dependent heat source problem," J. Sci. Kharazmi University, **13**(2).
7. Cannon, J. R. and Rundell, W. (1991), "Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation. J. Math Anal. Appl," **160**(2), pp 572-582.
8. Yin, H. M. (1996), "Solvability of a class of parabolic inverse problems. Adv. Differential Equations," **1**(6), pp 1005-1023.
9. Azari, H., Allegretto, W., Lin, Y. and Zhang, S. (2004), "Numerical procedures for recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation," Dynamics of continuous discrete and impulsive systems. series B: Application and Algorithms, **11**, pp 181-199.