

## حل معادله‌ی انتقال حرارت ناپایدار در مختصات غیردکارتی با استفاده از روش تفاضلات متناهی فشرده

سیده محبوبه مولوی عربشاهی<sup>۱\*</sup>، شکوفه قزljeh<sup>۲</sup>.

۱- استادیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

۲- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

### چکیده

ما در این مقاله روش عددی ضمنی تفاضلات متناهی فشرده دو گامه بر پایه‌ی گسسته‌سازی برای حل عددی معادله حرارت در مختصات غیردکارتی در ابعاد دو و سه را مورد بررسی قرار داده‌ایم. همچنین با روش ADI، پایداری معادله حرارت با روش مطرح شده مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که معادله حرارت ناپایدار در مختصات استوانه‌ای و کره‌ای در ابعاد دو و سه بدون قید و شرط پایدار می‌باشد. در ادامه ما با حل عددی معادله حرارت در ابعاد دو و سه در مختصات استوانه‌ای و کره‌ای و به دست آوردن ماکسیمم خطای مطلق به بررسی دقت روش مطرح شده پرداخته‌ایم. نتایج به دست آمده بیانگر آن است که روش تفاضلات متناهی فشرده دارای دقت بالا و پایداری بی قید و شرط برای حل معادله حرارت ناپایدار در مختصات غیردکارتی است.

**کلمات کلیدی:** معادلات سهموی، روش تفاضلات متناهی فشرده، روش ADI، معادله حرارت در مختصات قطبی.

### ۱. مقدمه

گرما یک شکل از انرژی است که خود به خود از یک ناحیه با درجه حرارت بالا به ناحیه با درجه حرارت پایین‌تر جریان می‌یابد، انتقال حرارت فرآیندی است که طی آن انتقال انرژی انجام می‌شود. وجود تفاوت دمایی در سیستم موجب انتقال حرارت می‌شود. انتقال حرارت به سه روش هدایت، همرفت و تابش انجام می‌شود. روش انتقال حرارت به روش هدایت به دو صورت ناپایدار و گذرا تقسیم‌بندی می‌شود. منظور از ناپایدار یعنی دما همواره با زمان متغیر است در حالی که واژه گذرا برای حالتی است که دمای جسم پس از گذشت زمان معینی به شرایط دائمی و مستقل از زمان برسد [۱]. در این مقاله حالتی را بررسی می‌کنیم که معادله وابسته به زمان یعنی انتقال حرارت هدایتی ناپایدار است. با توجه به دشواری حل تحلیلی معادلات انتقال حرارت با شرایط مرزی پیچیده از روش‌های عددی استفاده می‌شود. برای حل این نوع معادله روش‌های عددی بسیاری وجود دارد که بیشتر آن‌ها براساس تفاضلات محدود است [۱]. امروزه انرژی نقش مهمی را در توسعه و پیشرفت جوامع بشری ایفا می‌کند. انتقال انرژی به خصوص انتقال حرارت موضوع بسیار مهم در زمینه‌های صنعتی و حمل و نقل است [۲].

\* Corresponding author:  
Email: molavi@iust.ac.ir

معادله انتقال حرارت یک نوع معادله دیفرانسیل سهموی با مشتقات جزئی از مرتبه دوم است که در زمینه‌های مختلف علمی و مهندسی کاربرد دارد. در علم آمار معادله حرارت با مطالعه حرکت‌های براونی از طریق معادله فوکر-پلانک ارتباط دارد. همچنین در ریاضیات مالی، برای حل معادله دیفرانسیل جزئی بلک-اسکولز ابتدا از تبدیل این معادله به معادله حرارت استفاده می‌شود. همچنین معادله انتشار که حالت کلی معادله حرارت است در مطالعه فرآیندهای شیمیایی استفاده می‌شود [۳].

تقریباً تمام شاخه‌های مهندسی با مسئله انتقال حرارت مواجه می‌شوند. تعیین میزان انتقال حرارت یک مسئله کلیدی در طراحی و ساخت مکانیکی به‌ویژه در فرآیند ساختار تجهیزات است. اندازه‌گیری دیگ‌های بخار، دستگاه تولید گرما، یخچال‌ها و مبدل‌های حرارتی و... که همگی عمدتاً بستگی به میزان انتقال حرارت دارند. میزان اعتماد به تجهیزاتی مانند تیغه‌های توربین، دیواره‌های اتاق‌های احتراق بستگی به امکان خنک کردن تجهیزات با حذف گرما از سطح است. همچنین در طراحی تجهیزات باید آنالیز انتقال حرارت انجام شود تا از شرایطی که موجب گرمای بیش از حد و آسیب می‌شود اجتناب شود. این موارد نشان می‌دهد که مسئله انتقال حرارت در هر شاخه مهندسی حضور دارد. مسئله انتقال حرارت در دو شاخه ترمودینامیک و دینامیک سیال قرار دارد [۱].

یکی دیگر از کاربردهای معادله حرارت، انتقال حرارتی زیستی است. در مبحث انتقال حرارت در یک بافت زنده معادله پنس یکی از مدل‌های معروف و مورد پذیرش است. معادله انتقال حرارتی زیستی پنس که میزان انتقال گرما بین بافت و خون را توصیف می‌کند، به طور گسترده‌ای برای حل توزیع دما در گرما درمانی به کار می‌رود [۴،۵].

حل عددی معادله حرارت در مختصات غیردکارتی مسئله مهمی در مبحث انتقال حرارت است. مطالعات زیادی بر روی حل معادله حرارت در مختصات‌های متفاوت انجام شده است. ما به برخی از مطالعات انجام شده اشاره می‌کنیم. روش تفاضلی برای معادله حرارت در مختصات قطبی استوانه‌ای با دقت بالا توسط ساتلوری، ایثنگار و رام مانوهر (۱۹۸۷) ارائه شده است. سایمنت، لونسال و وین‌برگ (۱۹۷۸) روش‌های ضمنی فشرده برای معادلات سهموی با دقت بالا را بحث کرده‌اند. روش متقارن نیمه ضمنی با دقت  $O(k+h^2)$  برای معادله انتقال حرارت اصلی توسط لیون و گلاسنر (۱۹۸۵) ارائه شده است. روش تفاضل یکنواخت برای معادلات انتقال حرارت توسط استویان (۱۹۷۹) بحث شده است. برخی روش‌های صریح و ضمنی برای معادله حرارت استوانه‌ای در یک بعد توسط مایکل و پیرس (۱۹۶۳) ارائه شده‌اند [۶]. ورلی و گلیگان (۱۹۸۰) توزیع دمای گذرا در یک کره، زمانی که با یک شار گرما یکنواخت هدایت شده بود حل کردند. دافی (۱۹۸۵) آنالیز ورلی و گلیگان را به انتقال حرارت نوع تابشی تعمیم داد. حل معادله حرارت در مختصات کروی با روش تفاضل محدود توسط تهیبولت، برگرن و بانیون تعمیم داده شد [۷]. پائینو و رامو شبیه سازی عددی انتقال حرارت یک بعدی در مختصات کروی و استوانه‌ای با روش تفاضل محدود را انجام داده‌اند [۸].

السون-کتل با به کار بردن روش‌های ضمنی به حل معادله حرارت یک بعدی می‌پردازد. روش‌های ضمنی مورد استفاده پیاده سازی عددی روش اویلر و روش کرانک نیکلسون است. همچنین برای حل معادله حرارت در حالت دو بعدی از روش ضمنی با جهت‌گیری متناوب بهره می‌برد [۹].

ما در این مقاله ابتدا معادلات حرارت در مختصات غیردکارتی را معرفی کرده سپس روش تفاضل متناهی فشرده را شرح داده و به بررسی پایداری معادله حرارت در مختصات غیردکارتی در ابعاد دو و سه با استفاده از روش ADI پرداخته و در پایان به مطالعه نتایج عددی حاصل از روش تفاضل متناهی فشرده در معادله حرارت ناپایدار در مختصات غیردکارتی می‌پردازیم.

## ۲. معادله حرارت در مختصات غیر دکارتی

فرم کلی معادله حرارت به صورت  $C(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q(x,t)$  می‌باشد که در آن  $C(x)$  ظرفیت گرمایی،  $\rho(x)$  چگالی جرم،  $\varphi(x)$  شار حرارتی و  $Q(x)$  انرژی گرمایی در هر واحد حجم نسبت به زمان می‌باشد. چون معادله حرارت به صورت بالا قابل حل نیست با استفاده از قانون فوریه  $\varphi(x,t) = -k_0(x)\frac{\partial u}{\partial x}$  معادله حرارت را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۱۰]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q(x,t)}{C\rho} \quad (2-1)$$

$$k = \frac{k_0}{C\rho} \quad (2-2)$$

معادله انتقال حرارت در یک بعد با روش انتقال حرارت هدایتی به صورت رابطه (2-3) و معادله انتقال حرارت در دو بعد با روش انتقال حرارت هدایتی به صورت رابطه (2-4) و همچنین معادله انتقال حرارت در سه بعد با روش انتقال حرارت هدایتی به صورت رابطه (2-5) می‌باشد [۱۱]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (2-3)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (2-5)$$

معادله حرارت در مختصات استوانه ای به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (2-6)$$

همچنین معادله حرارت در مختصات کروی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} (rt) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{q}{K} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad (2-7)$$

### ۳. روش تفاضلات متناهی فشرده

روش‌های تفاضلات متناهی ابزار کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی هستند که با جایگزینی عملگرهای مشتق پیوسته با تقریبات تفاضلات متناهی انجام می‌شود. یکی از نمونه‌های ساده این روش، روش تفاضلات متناهی مرکزی کلاسیک با دقت مرتبه دوم است [۱۲]. روش‌های تفاضلات متناهی با مرتبه پایین، دقت کافی برای حل مسائل مربوط به دینامیک سیالات را ندارد لذا توجه به سمت روش‌های تفاضلات متناهی فشرده با مرتبه بالا جلب شده است. روش‌های تفاضلات متناهی فشرده، ضمنی بوده و ارزیابی از مشتقات با دقت بالا در تعداد نقاط گره‌ای مشابه دارد [۱۳].

روش عددی دو گامه بر پایه گسسته‌سازی برای حل سیستم در ابعاد دو و سه با دقت بالا در مبحث معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی شبه‌خطی سهموی با شرایط مرزی و اولیه مناسب ارائه شده است [۱۴،۱۵]. همچنین، تقریبی از مشتق مرتبه اول را به دست می‌آورد. روش ارائه شده دارای دقت مرتبه چهارم نسبت به فضا و دارای دقت مرتبه دوم نسبت به زمان است و شامل ۹ گره در دو بعد و ۱۹ گره در سه بعد از یک سلول فشرده منفرد است. روش ارائه شده مناسب معادلات سهموی با ضرایب منفرد است [۱۴،۱۵]. برای توصیف این روش معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر خطی به فرم زیر در نظر گرفته می‌شود [۱۴].

$$A(x,y,t)\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + B(x,y,t)\frac{\partial^2 X}{\partial y^2} = f(x,y,t,u_x, u_y, u_t) \quad (3-1)$$

که  $\Omega = \{(x, y, t) | 0 < x, y < 1, t > 0\}$  و شرایط اولیه و مرزی به صورت زیر داده شده است:

$$u(x, y, 0) = u_x(x, y, 0) \quad (3-2)$$

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), u(1, y, t) = g_1(y, t), 0 \leq y \leq 1; t > 0 \quad (3-3)$$

$$u(x, 0, t) = h_0(x, t), u(x, 1, t) = h_1(x, t), 0 \leq x \leq 1; t > 0 \quad (3-4)$$

در دامنه جواب  $\Omega$  یک گره با اندازه شبکه  $\Delta x = \Delta y = h > 0$  در جهت  $x, y$  و  $\eta > 0$  در جهت  $t$  قرار داده شده است. هر نقطه گره با  $(x_1, y_m, t_j)$  نشان داده شده است، که  $x_1 = lh$ ،  $y_m = mh$ ،  $t_j = j\eta$  با  $j=0, 1, 2, \dots$  و  $m=0(1)N+1$  به طوری که  $(N+1)h=1$  است. پارامتر نسبی شبکه  $\lambda = \eta/h^2$  است. جواب دقیق و تقریبی از  $u(x_1, y_m, t_j)$  به ترتیب با  $U_{l,m}^j$  و  $u_{l,m}^j$  به دست می‌آید و  $J(x_1, y_m, t_j)$  به صورت  $J_{l,m}^j$  نمایش داده می‌شود. در نقطه گره‌ای  $(x_1, y_m, t_j)$  معادله دیفرانسیل (3-1) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A_{l,m}^j \frac{\partial^2 U_{l,m}^j}{\partial x^2} + B_{l,m}^j \frac{\partial^2 U_{l,m}^j}{\partial y^2} = f(x_1, y_m, t_j, U_{l,m}^j, U_{xl,m}^j, U_{yl,m}^j, U_{ul,m}^j) \quad (3-5)$$

همچنین  $t_j = t_j + \eta h$  که  $\theta \in [0, 1]$  است.  $J(x_1, y_m, \bar{t}_j)$  به صورت  $\bar{J}_{l,m}^j$  نشان داده می‌شود. تقریبات مورد نیاز برای روش دقت مرتبه بالا به صورت زیر می‌باشد. برای  $p, q=0, \pm 1$  به صورت زیر قرار داده شده است:

$$\bar{U}_{l+p, m+q}^j = \theta U_{l+p, m+q}^{j+1} + (1-\theta) U_{l+p, m+q}^j \quad (3-6)$$

$$\bar{U}_{l\pm 1/2, m}^j = (\bar{U}_{l\pm 1, m}^j + \bar{U}_{l, m}^j) / 2 \quad (3-7)$$

$$\bar{U}_{l, m\pm 1/2}^j = (\bar{U}_{l, m\pm 1}^j + \bar{U}_{l, m}^j) / 2 \quad (3-8)$$

$$\bar{U}_{xl, m}^j = (\bar{U}_{l+1, m}^j - \bar{U}_{l-1, m}^j) / 2h \quad (3-9)$$

$$\bar{U}_{xl\pm 1/2, m}^j = (\pm \bar{U}_{l\pm 1, m}^j \mp \bar{U}_{l, m}^j) / h \quad (3-10)$$

$$\bar{U}_{xl, m\pm 1/2}^j = (\bar{U}_{l+1, m\pm 1}^j - \bar{U}_{l-1, m\pm 1}^j + \bar{U}_{l+1, m}^j - \bar{U}_{l-1, m}^j) / 4h \quad (3-11)$$

$$\bar{U}_{xxl, m}^j = (\bar{U}_{l+1, m}^j - 2\bar{U}_{l, m}^j + \bar{U}_{l-1, m}^j) / h^2 \quad (3-12)$$

$$\bar{U}_{xxl, m\pm 1}^j = (\bar{U}_{l+1, m\pm 1}^j - 2\bar{U}_{l, m\pm 1}^j + \bar{U}_{l-1, m\pm 1}^j) / h^2 \quad (3-13)$$



$$\bar{U}_{yl,m}^j = (\bar{U}_{l,m+1}^j - \bar{U}_{l,m-1}^j) / 2h \quad (3-14)$$

$$\bar{U}_{yl\pm 1/2,m}^j = (\bar{U}_{l\pm 1,m+1}^j - \bar{U}_{l\pm 1,m-1}^j + \bar{U}_{l,m+1}^j - \bar{U}_{l,m-1}^j) / 4h \quad (3-15)$$

$$\bar{U}_{yl,m\pm 1/2}^j = (\pm \bar{U}_{l,m\pm 1}^j \mp \bar{U}_{l,m}^j) / h \quad (3-16)$$

$$\bar{U}_{yyl,m}^j = (\bar{U}_{l,m+1}^j - 2\bar{U}_{l,m}^j + \bar{U}_{l,m-1}^j) / h^2 \quad (3-17)$$

$$\bar{U}_{yyl\pm 1,m}^j = (\bar{U}_{l\pm 1,m+1}^j - \bar{U}_{l\pm 1,m}^j + \bar{U}_{l\pm 1,m-1}^j) / h^2 \quad (3-18)$$

$$\bar{U}_{tl+p,m+q}^j = (\bar{U}_{l+p,m+q}^{j+1} - \bar{U}_{l+p,m+q}^j) / \eta \quad (3-19)$$

$$\bar{U}_{tl\pm 1/2,m}^j = (\bar{U}_{l\pm 1,m}^{j+1} + \bar{U}_{l,m}^{j+1} - \bar{U}_{l\pm 1,m}^j - \bar{U}_{l,m}^j) / 2\eta \quad (3-20)$$

$$\bar{U}_{tl,m\pm 1/2}^j = (\bar{U}_{l,m\pm 1}^{j+1} + \bar{U}_{l,m}^{j+1} - \bar{U}_{l,m\pm 1}^j - \bar{U}_{l,m}^j) / 2\eta \quad (3-21)$$

با استفاده از تقریبات بالا عبارات زیر تعریف شده است:

$$\bar{F}_{l\pm 1/2,m}^j = f(x_{l\pm 1/2}, y_m, \bar{t}_j, \bar{U}_{l\pm 1/2,m}^j, \bar{U}_{xl\pm 1/2,m}^j, \bar{U}_{yl\pm 1/2,m}^j, \bar{U}_{tl\pm 1/2,m}^j) \quad (3-22)$$

$$\bar{F}\bar{U}_{l,m\pm 1/2}^j = f(x_l, y_{m\pm 1/2}, \bar{t}_j, \bar{U}_{l,m\pm 1/2}^j, \bar{U}_{xl,m\pm 1/2}^j, \bar{U}_{yl,m\pm 1/2}^j, \bar{U}_{tl,m\pm 1/2}^j) \quad (3-23)$$

تقریبات به صورت زیر قرار داده شده است:

$$\bar{U}_{l,m}^j = \bar{U}_{l,m}^j + a_1 h^2 (\bar{F}_{l+1/2,m}^j + \bar{F}_{l-1/2,m}^j) + a_2 h^2 (\bar{F}_{l,m+1/2}^j + \bar{F}_{l,m-1/2}^j) + a_3 h^2 \bar{U}_{xxl,m}^j + a_4 h^2 \bar{U}_{yyl,m}^j \quad (3-24)$$

$$\bar{U}_{xl,m}^j = \bar{U}_{xl,m}^j + b_1 h (\bar{F}_{l+1/2,m}^j - \bar{F}_{l-1/2,m}^j) + b_2 h (\bar{U}_{yyl+1,m}^j - \bar{U}_{yyl-1,m}^j) + b_3 h^2 \bar{U}_{xxl,m}^j + b_4 h^2 \bar{U}_{yyl,m}^j \quad (3-25)$$

$$\bar{U}_{yl,m}^j = \bar{U}_{yl,m}^j + c_1 h (\bar{F}_{l,m+1/2}^j - \bar{F}_{l,m-1/2}^j) + c_2 h (\bar{U}_{xxl,m+1}^j - \bar{U}_{xxl,m-1}^j) + c_3 h^2 \bar{U}_{xxl,m}^j + c_4 h^2 \bar{U}_{yyl,m}^j \quad (3-26)$$

$$\bar{U}_{tl,m}^j = \bar{U}_{tl,m}^j + d_1 (\bar{U}_{tl+1,m}^j - 2\bar{U}_{tl,m}^j + \bar{U}_{tl-1,m}^j) + d_2 (\bar{U}_{tl,m+1}^j - 2\bar{U}_{tl,m}^j + \bar{U}_{tl,m-1}^j) \quad (3-27)$$

در نهایت تعریف زیر ارائه شده است:

$$\bar{\bar{F}}_{l,m}^j = f(x_l, y_m, \bar{t}_j, \bar{U}_{l,m}^j, \bar{U}_{xl,m}^j, \bar{U}_{yl,m}^j, \bar{U}_{tl,m}^j) \quad (3-28)$$

در هر نقطه گره‌ای  $(x_l, y_m, t_j)$  داریم  $l, m = 1(1)N$  و همچنین  $j = 0, 1, 2, \dots$  و معادله دیفرانسیل (3-1) به صورت

زیر به دست آمده است:

$$L[\bar{U}] \equiv [L_1 \delta_x^2 + L_2 \delta_y^2 + L_3 (2\delta_x^2 \mu_y \delta_y) + L_4 (2\delta_y^2 \mu_x \delta_x) + L_5 \delta_x^2 \delta_y^2] \bar{U}_{l,m}^j = h^2 [J_1 \bar{F}_{l+1/2,m}^j + J_2 \bar{F}_{l-1/2,m}^j + J_3 \bar{F}_{l,m+1/2}^j + J_4 \bar{F}_{l,m-1/2}^j - 2\bar{\bar{F}}_{l,m}^j] + \bar{T}_{l,m}^j \quad (3-29)$$

که  $\delta_x u_{l+1/2,m} - u_{l-1/2,m} = \frac{1}{2}(u_{l+1/2,m} + u_{l-1/2,m})$  و به ترتیب عملگر تفاضل مرکزی و میانگین در جهت X و

...هستند و خطای برشی موضعی برابر  $\bar{T}_{l,m}^j = O(\eta^2 h^2 + \eta h^4 + h^6)$  می باشد و داریم:

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= \bar{A}_{x1,m}^j / \bar{A}_{1,m}^j, \bar{K}_2 = \bar{B}_{y1,m}^j / \bar{B}_{1,m}^j \\ L_1 &= 6\bar{A}_{1,m}^j + \frac{h^2}{2} (\bar{A}_{xx1,m}^j + \bar{A}_{yy1,m}^j - 2\bar{K}_1 \bar{A}_{x1,m}^j - 2\bar{K}_2 \bar{A}_{y1,m}^j), \\ L_2 &= 6\bar{B}_{1,m}^j + \frac{h^2}{2} (\bar{B}_{xx1,m}^j + \bar{B}_{yy1,m}^j - 2\bar{K}_1 \bar{B}_{x1,m}^j - 2\bar{K}_2 \bar{B}_{y1,m}^j), \\ L_3 &= \frac{1}{2} h (\bar{A}_{y1,m}^j - \bar{K}_2 \bar{A}_{1,m}^j), L_4 = \frac{1}{2} h (\bar{B}_{x1,m}^j - \bar{K}_1 \bar{B}_{1,m}^j), L_5 = \frac{1}{2} (\bar{A}_{1,m}^j + \bar{B}_{1,m}^j) \\ J_1 &= 2-h\bar{K}_1, J_2 = 2+h\bar{K}_1, J_3 = 2-h\bar{K}_2, J_4 = 2+h\bar{K}_2. \end{aligned} \quad (3-30)$$

روش عددی دو گامه بر پایه گسسته سازی برای حل سیستم با دقت بالا در معادلات شبه خطی سهموی در سه بعد نیز توسط موهانتی مورد بررسی قرار گرفته است [۱۵].

#### ۴. آنالیز پایداری معادله حرارت در مختصات غیر دکارتی با استفاده از روش ADI

روش ADI به عنوان یک روش تکراری خوب برای معادلات ضمنی به کار برده می شود این روش شامل حل یک ماتریس سه قطری با معادلات چند مجهولی در هر گام زمانی می باشد. ایده اصلی برای به کار بردن یک روش ضمنی تنها یکی از محورهای X و Y و متناوب بین این دو است. از مزیت های این روش دقت مرتبه دوم نسبت به زمان و مکان و همچنین پایداری خوب است [۱۶].

الگوریتم ADI دارای دو گام است که در هر گام یک عملگر ضمنی به کار برده می شود. در ابتدا یک نیم گام به طور ضمنی در X و به طور صریح در Y قرار می گیرد سپس یک نیم گام به طور ضمنی در Y و به طور صریح در X قرار می گیرد. الگوریتم ADI به صورت زیر می باشد [۱۷]:  
گام اول: در مرحله اول معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\alpha_i u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \beta_i u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \gamma_i u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = f_{ij} \quad (4-1)$$

در معادله (4-1) روابط زیر را داریم:

$$\alpha_i = -\frac{(\sigma_1 x_i)^2}{4h^2}, \beta_i = \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{(\sigma_1 x_i)^2}{2h^2} + \frac{rx_i}{2h} + \frac{r}{2}, \gamma_i = -\frac{(\sigma_1 x_i)^2}{4h^2} - \frac{rx_i}{2h}. \quad (4-2)$$

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \frac{u_{ij}^n}{\Delta\tau} + \frac{1}{4} (\sigma_2 y_j)^2 \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{h^2} + \frac{1}{2} ry_j \frac{u_{ij+1}^n - u_{ij}^n}{h} \\ &+ \frac{1}{2} \rho \sigma_1 \sigma_2 x_i y_j \frac{u_{i+1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n - u_{i+1,j-1}^n}{4h^2}. \end{aligned} \quad (4-3)$$

برای اندیس j بردار  $u_{0:N_x,j}^{n+\frac{1}{2}}$  را می توان با حل دستگاه سه قطری  $A_x u_{0:N_x,j}^{n+\frac{1}{2}} = f_{0:N_x,j}$  به دست آورد که در آن  $A_x$  یک ماتریس سه قطری ساخته شده از معادله (4-1) با شرایط مرز خطی یعنی

$$A_x = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 + \beta_0 & \gamma_0 - \alpha_0 & 0 & & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \beta N_x - 1 & \gamma N_x - 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha N_x - \gamma N_x & \beta N_x + 2\gamma N_x \end{pmatrix}.$$

گام اول در روش ADI پیاده سازی یک حلقه در جهت  $y$  است:

for  $j=0:N_y$

for  $i=0:N_x$

set  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  &  $f_{ij}$  by Eqs.(4-2) and (4-3)

end

Solve  $A_x u_{0:N_x, j}^{n+\frac{1}{2}} = f_{0:N_x, j}$

end.

گام دوم: در مرحله دوم معادله زیر را در نظر می گیریم:

$$\alpha_j u_{i, j-1}^{n+1} + \beta_j u_{ij}^{n+1} + \gamma_j u_{i, j+1}^{n+1} = g_{ij} \quad (4-4)$$

در معادله (4-4) روابط زیر را داریم:

$$\alpha_j = -\frac{(\sigma_2 y_j)^2}{4h^2}, \beta_j = \frac{1}{\Delta\tau} + \frac{(\sigma_2 y_j)^2}{2h^2} + \frac{ry_j}{2h} + \frac{r}{2}, \gamma_j = -\frac{(\sigma_2 y_j)^2}{4h^2} - \frac{ry_j}{2h} \quad (4-5)$$

$$g_{ij} = \frac{u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta\tau} + \frac{(\sigma_1 x_i)^2}{4} \frac{u_{i+1, j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1, j}^{n+\frac{1}{2}}}{h^2} + \frac{1}{2} rx_i \frac{u_{i+1, j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{1}{2} \rho \sigma_1 \sigma_2 x_i y_j \frac{u_{i+1, j+1}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1, j-1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i-1, j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i+1, j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{4h^2} \quad (4-6)$$

برای اندیس  $i$  بردار  $u_{i, 0:N_y}^{n+1}$  را می توان با حل دستگاه سه قطری  $A_y u_{i, 0:N_y}^{n+1} = g_{i, 0:N_y}$  به دست آورد که در آن  $A_y$  یک ماتریس سه قطری ساخته شده از معادله (4-4) با شرایط مرز خطی یعنی

$$A_y = \begin{pmatrix} 2\alpha_0 + \beta_0 & \gamma_0 - \alpha_0 & 0 & & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & \beta_{N_y-1} & \gamma_{N_y-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{N_y} - \gamma_{N_x} & \beta_{N_y} + 2\gamma_{N_y} \end{pmatrix}.$$

گام دوم در روش ADI پیاده سازی یک حلقه در جهت x است:

for i=0: N<sub>x</sub>

for j=0: N<sub>y</sub>

set  $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$  &  $g_{ij}$  by Eqs.(4-5) and (4-6)

end

Solve  $A_y u_{i,0:N_y}^{n+1} = g_{i,0:N_y}$

end.

در هر دو گام، گام زمانی  $\Delta\tau$  در نظر گرفته می شود.

معادله سهموی خطی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$A(x,y,t)u_{xx} + B(x,y,t)u_{yy} = u_t + C(x,y,t)u_x + D(x,y,t)u_y + E(x,y,t). \quad (4-7)$$

رابطه (3-29) در معادله (4-7) به کار برده شده و طرح تفاضلی به فرم زیر به دست آمده است:

$$\begin{aligned} & \left[ 1 + S_1 \delta_x^2 + S_2 (2\mu_x \delta_x) + S_3 \delta_y^2 + S_4 (2\mu_y \delta_y) + P_1 (4\mu_x \delta_x \mu_y \delta_y) + P_2 (2\delta_x^2 \mu_y \delta_y) + P_3 (2\delta_y^2 \mu_x \delta_x) + P_4 (\delta_x^2 \delta_y^2) \right] U_{l,m}^{j+1} = \\ & \left[ 1 + R_1 \delta_x^2 + R_2 (2\mu_x \delta_x) + R_3 \delta_y^2 + R_4 (2\mu_y \delta_y) - P_1 (4\mu_x \delta_x \mu_y \delta_y) - P_2 (2\delta_x^2 \mu_y \delta_y) \right. \\ & \left. - P_3 (2\delta_y^2 \mu_x \delta_x) - P_4 (\delta_x^2 \delta_y^2) \right] U_{l,m}^j - \frac{\eta}{6} \sum E + O(\eta^2 + \eta h^2 + h^4). \end{aligned} \quad (4-8)$$

که در رابطه (4-8) روابط زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \Sigma E &= (J_1 - \frac{h\bar{C}_{l,m}^j}{2\bar{A}_{l,m}^j})\bar{E}_{l+1/2,m}^j + (J_2 + \frac{h\bar{C}_{l,m}^j}{2\bar{A}_{l,m}^j})\bar{E}_{l-1/2,m}^j + (J_3 - \frac{h\bar{D}_{l,m}^j}{2\bar{B}_{l,m}^j})\bar{E}_{l,m+1/2}^j + (J_4 + \frac{h\bar{D}_{l,m}^j}{2\bar{B}_{l,m}^j})\bar{E}_{l,m-1/2}^j - 2\bar{E}_{l,m}^j \\ T_1 &= \frac{h^2}{4} \left[ \frac{\bar{C}_{l,m}^j \bar{A}_{xl,m}^j}{\bar{A}_{l,m}^j} + \frac{\bar{D}_{l,m}^j \bar{A}_{yl,m}^j}{\bar{B}_{l,m}^j} \right], T_2 = \frac{h^2}{4} \left[ \frac{\bar{C}_{l,m}^j \bar{B}_{xl,m}^j}{\bar{A}_{l,m}^j} + \frac{\bar{D}_{l,m}^j \bar{B}_{yl,m}^j}{\bar{B}_{l,m}^j} \right], T_3 = \frac{h}{2} - \frac{h^2 \bar{K}_1}{4} - \frac{h^2 \bar{C}_{l,m}^j}{8\bar{A}_{l,m}^j}, \\ T_4 &= \frac{h}{2} + \frac{h^2 \bar{K}_1}{4} + \frac{h^2 \bar{C}_{l,m}^j}{8\bar{A}_{l,m}^j}, T_5 = \frac{h}{2} - \frac{h^2 \bar{K}_2}{4} - \frac{h^2 \bar{D}_{l,m}^j}{8\bar{B}_{l,m}^j}, T_6 = \frac{h}{2} + \frac{h^2 \bar{K}_2}{4} + \frac{h^2 \bar{D}_{l,m}^j}{8\bar{B}_{l,m}^j}, \\ T_7 &= \frac{h(2\bar{A}_{xl,m}^j + \bar{C}_{l,m}^j)}{4\lambda \bar{A}_{l,m}^j}, T_8 = \frac{h(2\bar{B}_{yl,m}^j + \bar{D}_{l,m}^j)}{4\lambda \bar{B}_{l,m}^j} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 L_6 &= T_1 + T_3 \bar{C}_{l+1/2,m}^j - T_4 \bar{C}_{l-1/2,m}^j, L_7 = T_2 + T_5 \bar{D}_{l,m+1/2}^j - T_6 \bar{D}_{l,m-1/2}^j, \\
 L_8 &= T_3 \bar{C}_{l+1/2,m}^j + T_4 \bar{C}_{l-1/2,m}^j + T_5 \bar{C}_{l,m+1/2}^j + T_6 \bar{C}_{l,m-1/2}^j - \frac{h}{2} \bar{C}_{l,m}^j, \\
 L_9 &= T_3 \bar{D}_{l+1/2,m}^j + T_4 \bar{D}_{l-1/2,m}^j + T_5 \bar{D}_{l,m+1/2}^j + T_6 \bar{D}_{l,m-1/2}^j - \frac{h}{2} \bar{D}_{l,m}^j, \\
 L_{10} &= T_5 \bar{D}_{l,m+1/2}^j + T_6 \bar{D}_{l,m-1/2}^j - 2T_3 \bar{D}_{l+1/2,m}^j - 2T_4 \bar{D}_{l-1/2,m}^j, \\
 L_{11} &= T_3 \bar{C}_{l+1/2,m}^j + T_4 \bar{C}_{l-1/2,m}^j - 2T_5 \bar{C}_{l,m+1/2}^j - 2T_6 \bar{C}_{l,m-1/2}^j, \\
 L_{12} &= \frac{1}{4} [T_3 \bar{D}_{l+1/2,m}^j - T_4 \bar{D}_{l-1/2,m}^j + T_5 \bar{C}_{l,m+1/2}^j - T_6 \bar{C}_{l,m-1/2}^j], \\
 S_1 &= \frac{1}{12} (1 + 2\lambda L_6 - \lambda L_1), S_2 = \frac{\lambda}{6} (L_8 - T_7), S_3 = \frac{1}{12} (1 + 2\lambda L_7 - \lambda L_2), S_4 = \frac{\lambda}{6} (L_9 - T_8), \\
 R_1 &= \frac{1}{12} (1 - 2\lambda L_6 + \lambda L_1), R_2 = -\frac{\lambda}{6} (L_8 + T_7), R_3 = \frac{1}{12} (1 - 2\lambda L_7 + \lambda L_2), R_4 = -\frac{\lambda}{6} (L_9 + T_8), \\
 P_1 &= \frac{\lambda}{6} L_{12}, P_2 = \frac{\lambda}{12} \left[ -\frac{h \bar{D}_{l,m}^j}{4} \left( 1 - \frac{\bar{A}_{l,m}^j}{\bar{B}_{l,m}^j} \right) + \frac{1}{2} (T_3 \bar{D}_{l+1/2,m}^j + T_4 \bar{D}_{l-1/2,m}^j) - L_3 \right], \\
 P_3 &= \frac{\lambda}{12} \left[ -\frac{h \bar{C}_{l,m}^j}{4} \left( 1 - \frac{\bar{B}_{l,m}^j}{\bar{A}_{l,m}^j} \right) + \frac{1}{2} (T_5 \bar{C}_{l,m+1/2}^j + T_6 \bar{C}_{l,m-1/2}^j) - L_4 \right], P_4 = -\frac{\lambda}{24} (\bar{A}_{l,m}^j + \bar{B}_{l,m}^j). \quad (4-9)
 \end{aligned}$$

و همچنین روابط زیر را داریم:

$$\xi_1 = \frac{[1 + 2R_1(\cos \beta h - 1) + 2iR_2 \sin \beta h]}{[1 + 2S_1(\cos \beta h - 1) + 2iS_2 \sin \beta h]}, \quad (4-10)$$

$$\xi_2 = \frac{[1 + 2R_3(\cos \gamma h - 1) + 2iR_4 \sin \gamma h]}{[1 + 2S_3(\cos \gamma h - 1) + 2iS_4 \sin \gamma h]}. \quad (4-11)$$

در نتیجه  $|\xi_1|, |\xi_2| \leq 1$  نشان دهنده پایداری بی قید و شرط معادله حرارت در مختصات استوانه‌ای و قطبی می‌باشد [۱۴].  
برای معادله حرارت در مختصات استوانه‌ای و قطبی در سه بعد نیز پایداری بی قید و شرط را می‌توان دید [۱۵].

## ۵. نتایج عددی

مثال ۱: معادله حرارت دو بعدی در مختصات استوانه‌ای و کروی به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = u_t + E(r, \theta, t), \quad 0 < r < 1; 0 < \theta < 1; t > 0$$

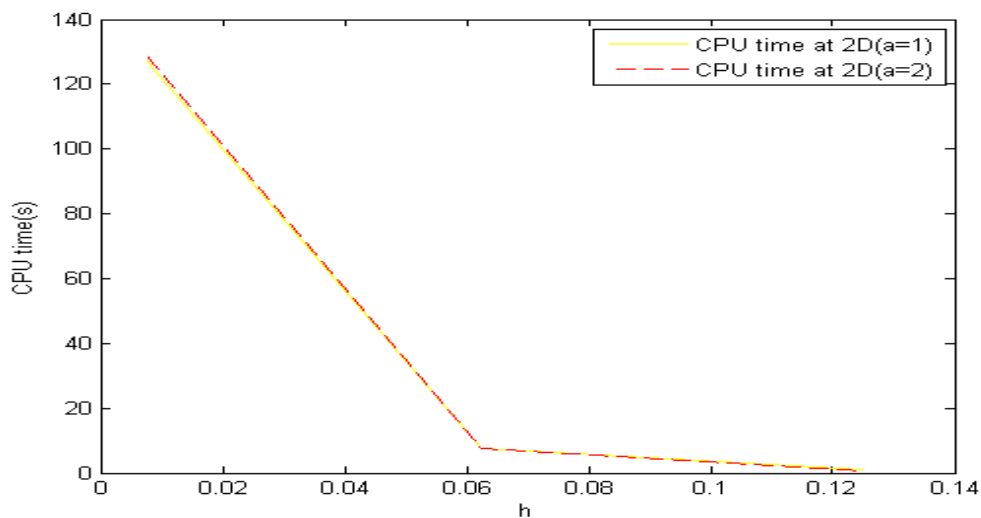
$$u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = u_t + E(r, \theta, t), \quad 0 < r < 1; 0 < \theta < 1; t > 0$$

این معادله دارای جواب دقیق  $u=e^{-1}r^2\cos(\pi\theta)$  می باشد. با استفاده از روش تفاضلات متناهی فشرده به حل عددی معادله پرداختیم. خطای جذر میانگین مربعات را محاسبه و در جدول ۱ قرار دادیم که  $t=1$  و  $\lambda=3.2$  در نظر گرفته ایم. روش عددی مطرح شده دارای دقت  $O(\eta^2 + \eta h^2 + h^4)$  است.

جدول ۱- خطای جذر میانگین مربعات در دو بعد

n time(s) ( $\alpha=2$ )	$u(\alpha=1)$	CPU time(s) ( $\alpha=1$ )	$u(\alpha=2)$	CPU
9	1.6647(-04)	1.056	2.1743(-04)	0.0599
17	1.0561(-05)	7.555	1.3433(-05)	7.755
33	6.7372(-07)	127.024	8.4146(-07)	128.68

جدول ۱ نشان دهنده خطای جذر میانگین مربعات معادله حرارت دو بعدی در مختصات استوانه‌ای و کروی می باشد. با مقایسه خطای جذر میانگین مربعات با  $n$  نشان می دهد هر چه  $n$  بیشتر باشد، خطای حاصل کمتر است.



شکل ۱- نمودار زمان پردازش حل معادله حرارت در دو بعد نسبت به تغییرات  $h$

زمان پردازش\* را در جدول ۱ نشان داده ایم. شکل ۱ نمودار مربوط به زمان پردازش حل عددی معادله حرارت در دو بعد با روش تفاضلات متناهی فشرده نسبت به تغییرات  $h$  است با مقایسه زمان پردازش با طول گام می بینیم که هر چه طول گام بیشتر باشد پردازنده به زمان بیشتری برای محاسبات نیاز دارد.

مثال ۲: معادله حرارت سه بعدی در مختصات قطبی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + u_{zz} + \frac{1}{r}u_r = u_t + G(r, \theta, z, t), \quad 0 < r, \theta, z < 1; t > 0$$

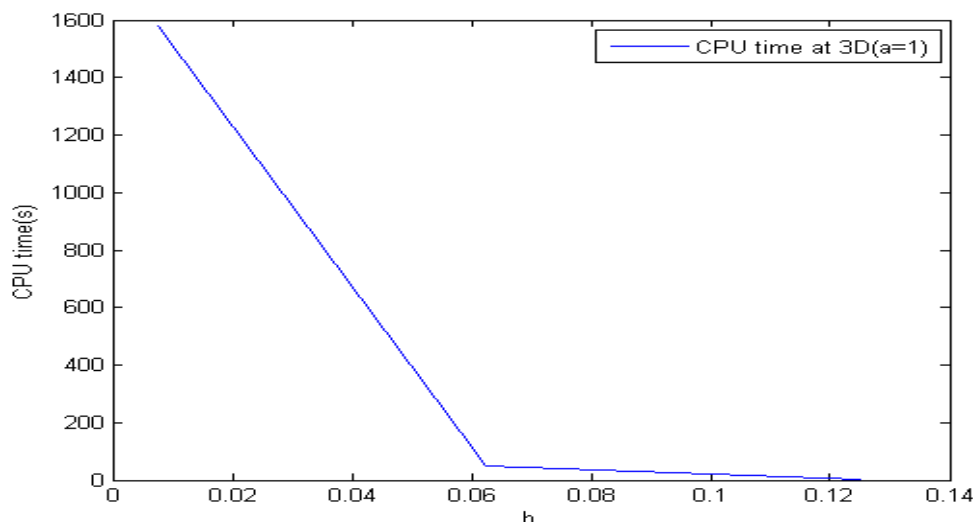
\* CPU time

این معادله دارای جواب دقیق  $u = e^{-2t} r^6 \cos(\pi\theta)\cos(\pi z)$  می‌باشد. با استفاده از روش تفاضل متناهی فشرده به حل عددی معادله پرداختیم. ماکسیمم خطای مطلق را محاسبه و در جدول ۲ قرار دادیم. در این جا نیز  $t=1$  و ثابت  $\lambda$  را برابر 1.6 در نظر گرفته‌ایم. روش عددی مطرح شده دارای دقت  $O(\eta^2 + \eta h^2 + h^4)$  می‌باشد.

جدول ۲- ماکسیمم خطای مطلق در سه بعد

n	$u(a=1)$	CPU time(s)
9	0.1376(-03)	1.74
17	0.8495(-05)	48.41
33	0.5493(-06)	1576.92

با مقایسه ماکسیمم خطای مطلق با  $n$  نشان می‌دهد هر چقدر  $n$  بیشتر باشد، خطای حاصل کمتر است.



شکل ۲- نمودار زمان پردازش حل معادله حرارت در سه بعد نسبت به تغییرات  $h$

زمان پردازش را در جدول ۲ نشان داده‌ایم. شکل ۲ نمودار مربوط به زمان پردازش حل عددی معادله حرارت در سه بعد با روش تفاضل متناهی فشرده نسبت به تغییرات  $h$  است با مقایسه زمان پردازش با طول گام می‌بینیم که هر چقدر طول گام بیشتر باشد پردازنده به زمان بیشتری برای محاسبات نیاز دارد. با زیاد شدن طول گام میزان محاسبات بیشتر شده و در نتیجه زمان پردازش افزایش می‌یابد. با مقایسه زمان پردازش این روش نسبت به زمان پردازش روش‌های عددی دیگر ملاحظه می‌کنیم که زمان محاسبات ۱۵٪ تا ۲۰٪ کاهش می‌یابد.

## ۶. نتیجه گیری

حل تحلیلی معادله حرارت در مختصات غیردکارتی با شرایط مرزی پیچیده کار دشواری است. بنابراین با کمک روش‌های عددی می‌توان این معادلات را حل کرد. در این مقاله ما به حل عددی معادله حرارت ناپایدار در مختصات غیردکارتی

با استفاده از روش تفاضل متناهی فشرده پرداختیم. همچنین با روش ADI پایداری معادله حرارت با روش مطرح شده را مورد ارزیابی قرار دادیم که پایداری بی قید و شرط معادله حرارت در ابعاد دو و سه در مختصات استوانه‌ای و کروی به دست آمد. دقت روش مطرح شده در ابعاد دو و سه برابر  $O(\eta^2 + \eta h^2 + h^4)$  می‌باشد. این روش دارای دقت بالا و پایداری بی قید و شرط برای حل معادله حرارت ناپایدار در مختصات غیردکارتی است. همچنین با مقایسه زمان پردازش این روش نسبت به زمان پردازش روش‌های عددی دیگر ملاحظه می‌کنیم که زمان محاسبات ۱۵٪ تا ۲۰٪ کاهش می‌یابد.

## ۷. مراجع

1. Sonnemans, P. J. M. (1992), "Application of body-fitted-coordinates in heat conduction problems", Eindhoven Technische Universiteit Eindhoven.
2. Bergles, A. E. (2002), "ExHFT for fourth generation heat transfer technology", Experimental Thermal and Fluid Science.
3. Dai, B. Zheng, B. Liang, Q. and Wang, L. (2013), "Numerical solution of transient heat conduction problems using improved meshless local Petrov–Galerkin method", Applied Mathematics and Computation.
4. Chopra, R. Wachsmuth, J. Burtnyk, M. Haider, M. A. and Bronskill, M. J. (2006), "Analysis of factors important for transurethral ultrasound prostate heating using MR temperature feedback", Physics in Medicine and Biology, Canada.
5. Liu, E.H. Saidel, G. M. and Harasaki, H. (2002), "Model Analysis of Tissue Responses to Transient and Chronic Heating", Biomedical Engineering Society.
6. Satteluri, R. K. I Yengar and Manohar, R. (1988), "High Order Difference Methods for Heat Equation in Polar Cylindrical Coordinates", Journal of computational physics.
7. Thibault, J. Bergern, S. and Bonin H. W. (2007), "on finite difference solutions of the heat equation in spherical coordinates", Computation and Methodology, Canada.
8. paulino L. H. and Romao, E. C. (2017), "Numerical Simulation of 1D Heat Conduction in Spherical and Cylindrical Coordinates by Fourth-Order Finite Difference Method", Mathematics Trends and Technology.
9. Olson-kattle, L. "Numerical Solution of partial differential equations", <http://espace.library.uq.edu.au/view/UQ:239427>.
10. Dawkins, P. (2018), "Differential Equations".
11. Holman, J. P. (2010), "Heat Transfer", Tenth Edition, Raghathan Srinivasan.
12. Zhang, K. Wang, L. and Zhang, Y. (2016), "Improved Finite Difference Method with a Compact Correction Term for Solving Poisson's Equations", Numerical Heat Transfer.
13. Dlamini, P. G. Motsa, S. S. Khumalo, M. (2013), "On the Comparison between Compact Finite Difference and Pseudospectral Approaches for Solving Similarity Boundary Layer Problems", Mathematical Problems in Engineering.



14. Mohanty, R. K. and Setia, N. (2012), "A new high accuracy two-level implicit off-step discretization for the system of two space dimensional quasi-linear parabolic partial differential equations", Applied Mathematics and Computation.
15. Mohanty, R. K. and Setia, N. (2015), "A new high accuracy two-level implicit off-step discretization for the system of three space dimensional quasi-linear parabolic partial differential equations", Computers and Mathematics with Applications.
16. Ismail, I.A., Allan, M.M. (2004), "A Designed ADI software for Solving Poissons Equation", Mathematical and Computational Applications.
17. Jeong, D., Kim, J. (2013), "A comparison study of ADI and operator splitting methods on option pricing models", Computational and Applied Mathematics.