

## شاخص $F$ ضرب کرونای همسایه‌ای

فاطمه عطارزاده<sup>\*</sup>، علی بهتویی<sup>۲</sup>

۱- دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی [prs.attarzadeh@gmail.com](mailto:prs.attarzadeh@gmail.com)

۲- دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی [a.behtoei@sci.ikiu.ac.ir](mailto:a.behtoei@sci.ikiu.ac.ir)

### چکیده

فرض کنید  $G$  یک گراف ساده باشد. برای گراف  $G$  شاخص  $F$  آن به صورت مجموع مکعب درجات رئوس تعریف می‌شود. در این مقاله به مطالعه و محاسبه مقدار این شاخص برای ضرب کرونای همسایه‌ای گراف‌ها می‌پردازیم.

کلمات کلیدی: شاخص  $F$ ، دور، مسیر، ضرب کرونای همسایه‌ای.

### ۱. مقدمه

در این مقاله گراف‌ها را ساده، متناهی و بدون جهت در نظر می‌گیریم. برای گراف  $G$  مرتبه و اندازه گراف را به ترتیب با  $n_G$  و  $m_G$  نشان می‌دهیم. درجه رأس  $a$  از گراف  $G$  را با نماد  $\deg_G(a)$  نشان می‌دهیم. (یا برای راحتی کار و در جایی که ابهام نباشد با  $\deg(a)$  نشان می‌دهیم.) که برابر با تعداد مجاورهای رأس  $a$  (یعنی  $N(a)$ ) در گراف  $G$  است. بنابراین داریم  $|N(a)| = \deg(a)$  هر پایای گرافی عددی حقیقی است که به گراف نسبت داده می‌شود و تحت خودریختی‌های آن گراف ثابت می‌ماند. برای گراف‌های متناظر با مولکول‌های شیمیایی پایاهای گرافی غالباً به عنوان شاخص‌های توپولوژیک شناخته می‌شوند. شاخص‌های توپولوژیک کاربردهای بسیاری در شیمی-ریاضی دارند [5]. هم‌چنین از آن‌ها می‌توان به عنوان ابزارهایی برای مطالعه و مدل‌سازی مولکول‌های شیمیایی و سایر خواص مولکول‌ها استفاده کرد.

\* Corresponding author: فاطمه عطارزاده

Email: [prs.attarzadeh@gmail.com](mailto:prs.attarzadeh@gmail.com)

در سال ۱۹۷۲ دو پایای گرافی مبتنی بر درجه رئوس به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفتند. اولین و دومین شاخص زاگرب گراف  $G$  که به ترتیب با  $M_1$  و  $M_2$  نشان می‌دهیم. تقریباً این دو شاخص به عنوان قدیمی‌ترین و شناخته شده‌ترین شاخص‌های توپولوژیک تعریف شده براساس درجه رئوس شناخته می‌شوند و به صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$M_1 = M_1(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u) + d_G(v)]^2$$

$$M_2 = M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)d_G(v)$$

برای مطالعه جزئیات بیشتر این شاخص‌ها به مقالات [2] و [6] و [9] مراجعه کنید. در مطالعه‌ای روی ساختار انرژی  $\pi$ - الکترون ( $\mathcal{E}$ ) نشان داده شده است که مقدار ( $\mathcal{E}$ ) در میان شاخص‌های توپولوژیک، به شاخص زاگرب اول وابستگی بیشتری دارد [7]. از طرفی در مقاله‌ای مشابه بیان شد که انرژی  $\pi$ -الکترون ( $\mathcal{E}$ ) علاوه بر شاخص زاگرب اول به شاخص توپولوژیک دیگری که به صورت مجموع مکعب درجات رئوس تعریف می‌شود، نیز وابسته است. اخیراً دو شاخص فورچولا و گاتمن این اندیس را شاخص  $F$  یا شاخص توپولوژیک فراموش شده نامیدند و برخی از خواص اساسی آن را برای مولکول‌های گرافی بررسی کردند و نشان دادند که این شاخص می‌تواند تقریباً همه خواص کاربردی فیزیکی و شیمیایی اندیس زاگرب را داشته باشد. آن‌ها نشان دادند که برای عوامل غیر مرکزی یا آنتروپی یا هر دو، ضریب هم‌بستگی بزرگ‌تر از 0/95 است. در ادامه، این شاخص را شاخص  $F$  می‌نامیم و آن را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

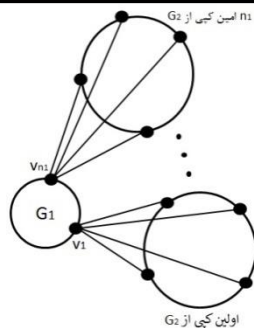
$$F = F(G) = \sum_{uv \in E(G)} [d_G(u)^2 + d_G(v)^2]$$

آذری در مقاله [1] تعدادی کران بالا برای شاخص زاگرب ضریبی چند عمل گرافی به دست آورد. داس و همکارانش در مقاله [3] فرمول‌های دقیقی برای محاسبه اولین و دومین شاخص زاگرب برای برخی از اعمال گراف‌ها به دست آورده‌اند. کاتایاما و نارومی در مقاله [4] کران‌های پایین برای شاخص چند عمل گرافی دیگر ارائه دادند. خلیفه و همکارانش در مقاله [8] مطالب مهمی در رابطه با اعمال گراف‌ها برای محاسبه شاخص‌های توپولوژیک گراف‌های خاص بیان کرده‌اند.

## 2. ضرب کرنا

ضرب کرنا  $G_1 \odot G_2$  از دو گراف  $G_1$  و  $G_2$  توسط یک کپی از  $G_1$  و  $n_1$  (تعداد رأس‌های گراف اول) کپی از  $G_2$  حاصل می‌شود، که در آن برای هر  $i \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  رأس  $i$  ام  $G_1$  به همه رئوس کپی  $i$  ام  $G_2$  وصل است. هم‌چنین ضرب کرنا  $G_1$  و  $G_2$  در حالت کلی دارای  $n_1 n_2 + n_1$  رأس و  $m_1 + n_1 m_2 + n_1 n_2$  یال است.

شکل زیر الگوی کلی ضرب کرنا دو گراف  $G_1$  و  $G_2$  را نشان می‌دهد.



قضیه: [10] شاخص توپولوژیک فراموش شده ضرب کرونا  $G_1 \odot G_2$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$F(G_1 \odot G_2) = F(G_1) + n_1 F(G_2) + 3n_2 M_1(G_1) + 3n_1 M_1(G_2) + 6n_2^2 m_1 + 6n_1 m_2 + n_1 n_2 (n_2^2 + 1)$$

### ۳. ضرب کرونای همسایه‌ای

فرض کنید  $G_1$  و  $G_2$  دو گراف به ترتیب با مرتبه  $n_1$  و  $n_2$  باشند، ضرب کرونای همسایه‌ای  $G_1$  و  $G_2$  گرافی است که با قرار دادن یک کپی از  $G_1$  و  $n_1$  کپی از گراف  $G_2$  حاصل می‌شود که در آن هر همسایه از  $i$  امین رأس  $G_1$  را به هر رأس از  $i$  امین کپی  $G_2$  وصل می‌کنیم و آن را با نماد  $G_1 \diamond G_2$  نشان می‌دهیم. گاهی برای سهولت در نمادگذاری کپی  $i$  ام از  $G_2$  را با نماد  $G_{2,i}$  نشان می‌دهیم.

فرض کنید  $x_i$  رأسی از گراف  $G_1$  و  $y_s$  رأسی از  $i$  امین کپی گراف  $G_2$  باشد. در این صورت بنا بر تعریف ضرب کرونای همسایه‌ای رأس  $y_s$  از  $G_2$  به تمام رئوس  $N_{x_i}$  در گراف  $G_1$  وصل می‌شود. بنابراین داریم

$$\deg_{(G_1 \diamond G_2)}(x_i) = \deg_{G_1}(x_i) + \deg_{G_1}(x_i) \cdot n_2 \quad \text{و} \quad \deg_{(G_1 \diamond G_2)}(y_s) = \deg_{G_2}(y_s) + \deg_{G_1}(x_i)$$

قضیه: شاخص زاگرب اول برای ضرب کرونای همسایه‌ای  $G_1 \diamond G_2$  به صورت زیر به دست می‌آید.

$$M_1(G_1 \diamond G_2) = (1 + n_2)^2 M_1(G_1) + n_1 M_1(G_2) + 8m_1 m_2 + n_2 M_1(G_1)$$

برهان: با در نظر گرفتن رابطه‌ای که برای درجه رئوس داخل کپی  $G_1$  و رئوس داخل کپی های  $G_{2,i}$  از  $G_2$  به دست آوردیم مقدار شاخص زاگرب اول ضرب کرونای همسایه‌ای  $G_1 \diamond G_2$  را می‌توانیم به صورت زیر حساب کنیم

$$\begin{aligned}
 M_1(G_1 \diamond G_2) &= \sum_{x_i \in V(G_1)} (deg_{G_1}(x_i) (1 + n_2))^2 \\
 &+ \sum_{x_i \in V(G_1)} \sum_{y_s \in V(G_2)} (deg_{G_1}(x_i) + deg_{G_2}(y_s))^2 \\
 &= (1 + n_2)^2 M(G_1) \\
 &+ \sum_{x_i \in V(G_1)} \sum_{y_s \in V(G_2)} (deg_{G_2}(y_s)^2 + 2deg_{G_2}(y_s) deg_{G_1}(x_i) + deg_{G_1}(x_i)^2) \\
 &= (1 + n_2)^2 M_1(G_1) + n_1 M_1(G_2) + 8m_1 m_2 + n_2 M_1(G_1)
 \end{aligned}$$

نتیجه: مقدار شاخص زاگرب اول ضرب کرونای همسایه‌های  $C_{n_1} \diamond P_{n_2}$  به صورت زیر است.

$$M_1(C_{n_1} \diamond P_{n_2}) = 4n_1 n_2^2 + 24n_1 n_2 - 10n_1$$

برهان: می‌دانیم

$$M_1(C_{n_1}) = 4n_1 \quad , \quad M_1(P_{n_2}) = 4n_2 - 6$$

بنابراین با توجه به قضیه قبل خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 M_1(C_{n_1} \diamond P_{n_2}) &= (1 + n_2)^2 M_1(C_{n_1}) + n_1 M_1(P_{n_2}) + 8m_1 m_2 + n_2 M_1(P_{n_2}) \\
 &= (1 + n_2)^2 (4n_1) + n_1 (4n_2 - 6) + 8n_1 (n_2 - 1) + n_2 (4n_1) \\
 &= 4n_1 n_2^2 + 24n_1 n_2 - 10n_1
 \end{aligned}$$

برای مثال شاخص زاگرب اول ضرب کرونای همسایه‌های  $P_2$  و  $C_4$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

با استفاده از رابطه به دست آمده از نتیجه قبل خواهیم داشت

$$M_1(C_4 \diamond P_2) = 64 + 192 - 40 = 216$$

قضیه: شاخص توپولوژیک فراموش شده ضرب کرونای همسایه‌های  $G_1 \diamond G_2$  از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$F(G_1 \diamond G_2) = (1 + n_2)^3 F(G_1) + n_1 F(G_2) + 6m_1 M_1(G_2) + 6m_2 M_1(G_1) + n_2 F(G_1)$$

برهان: با توجه به رابطه‌ای که برای درجه رئوس ضرب کرونای همسایه‌ای در بالا بیان شد، برای مقدار شاخص توپولوژیک فراموش

شده  $G_1 \diamond G_2$  داریم

$$\begin{aligned}
 F(G_1 \diamond G_2) &= \sum_{x_i \in V(G_1)} (deg_{G_1}(x_i) (1 + n_2))^3 \\
 &+ \sum_{x_i \in V(G_1)} \sum_{y_s \in V(G_2)} (deg_{G_1}(x_i) + deg_{G_2}(y_s))^3 \\
 &= (1 + n_2)^3 F(G_1) \\
 &+ \sum_{x_i \in V(G_1)} \sum_{y_s \in V(G_2)} (deg_{G_2}(y_s)^3 + 3deg_{G_2}(y_s)^2 deg_{G_1}(x_i) \\
 &+ 3(deg_{G_1}(x_i)^2 deg_{G_2}(y_s) + deg_{G_1}(x_i)^3) = (1 + n_2)^3 F(G_1) + n_1 F(G_2) \\
 &+ 2m_1 3M_1(G_2) + 6m_2 M_1(G_1) + n_2 F(G_1)
 \end{aligned}$$

نتیجه: مقدار شاخص  $F$  برای ضرب کرونای همسایه‌ای  $C_{n_1} \diamond P_{n_2}$  به صورت زیر است.

$$F(C_{n_1} \diamond P_{n_2}) = 8n_1 n_2^3 + 24n_1 n_2^2 + 88n_1 n_2 - 66n_1$$

برهان: می‌دانیم

$$F(C_{n_1}) = 8n_1 \quad , \quad F(P_{n_2}) = 8n_2 - 14$$

بنابراین با توجه به قضیه قبل خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 F(C_{n_1} \diamond P_{n_2}) &= (1 + n_2)^3 8n_1 + n_1(8n_2 - 14) + 6n_1(4n_2 - 6) + 6(n_2 - 1)(4n_1) \\
 &+ n_2(8n_1) \\
 &= 8n_1 n_2^3 + 24n_1 n_2^2 + 88n_1 n_2 - 66n_1
 \end{aligned}$$

به عنوان نمونه، شاخص  $F$  برای ضرب کرونای همسایه‌ای  $C_4$  و  $P_2$  را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

با استفاده از رابطه به دست آمده از نتیجه قبل خواهیم داشت.

$$F(C_4 \diamond P_2) = 256 + 384 + 704 - 264 = 1080$$

مراجع

۱. Azari, M., (2014), *Sharplower bounds onthe Narumi-Katayama index of graph operations*, *Appl. Math. Comput.*, 239, 409–421.
2. Das, K.C., Gutman, I., (2004), *Some properties of the second Zagreb index*, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 52,103–112.
3. Das, K.C., Yurttas, A., Togan, M., Cevik, A.S., and Cangul, I.N., (2013), *The multiplicative Zagreb indices of graph operations*, *J. Inequal. Appl.*, 2013:90, doi: 10.1186/1029-242X-2013-90.
4. De, N., Pal, A., and Nayeem, S.M.A., (2014), *On some bounds and exact formulae for connective eccentric indices of graphs under some graph operations* *Intern. J. Combinatorics*, 2014, doi: 10.1155/2014/579257.
5. Devillers, J., Balaban, A.T., (2002), (eds.): *Topological Indices and Related Descriptors in QSAR and QSPR*. Gordon and Breach, Amsterdam . 5055–5056.
6. Gutman, I., Das, K.C., (2004), *The first Zagreb index 30 years after*, *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.* 50, 83–92.
7. Gutman, I., Trinajstic, N., (1972), *Graph theory and molecular orbitals. Total  $\pi$  –electron energy of alternant hydrocarbons*, *Chem. Phys. Lett.*, 17, 535–538.
۸. Khalifeh, M.H., Yousefi-Azari, H., Ashrafi, A.R., (2009), *The first and second Zagreb indices of some graph operations*, *Discrete Appl. Math.*, 157(4), 804–811.
۹. Nikolic, S., Kovaevi'c, G., Milisiri'c, A., Trinajsti'c, N., (2003), *The Zagreb indices 30 years after*, *Croat. Chem. Acta*76, 113–124.
10. Nilanjan DE, SK. MD. Abunaeem, and Anita Pal.,(2015), *F-INDEX OF SOME GRAPH OPERATIONS*.