هفتمین کنفرانس بین‌المللی
ترکیبیات، رمزنگاری، علوم کامپیوتر و محاسبات
۲۵ و ۲۶ آبان ۱۴۰۱

وجود جواب معادلات انتگرال-دیفرانسیل به کمک اندازه ی نافشردگی

هنگامه تمیمی[۱]
دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

سمیه سعیدی نژاد
دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

محمدباقر قائمی
دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده

این مقاله شرایط لازم برای وجود جواب دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل با هسته مجزا را مورد مطالعه قرار می دهد. در نهایت در قالب مثال به بررسی وجود جواب یک معادله ی انتگرال-دیفرانسیل می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: اندازه ی نافشردگی، نقطه ثابت داربو، دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل
[2010]: 47H10, 45J05, 47H08

۱ مقدمه

نویسندگان بسیاری از اندازه ی نافشردگی به عنوان ابزاری کارآمد برای اثبات وجود جواب معادلات خود بهره گرفته اند. مفهوم اندازه ی نافشردگی اولین بار توسط کاراتوسکی معرفی شده است. اندازه ی نافشردگی با تقلیل شرط فشردگی به پیوستگی امکان تعمیم نقطه ثابت شاودر به نقطه ثابت داربو را فراهم می سازد. در یک اندازه ی نافشرده مجموعه های پیش فشرده دارای اندازه ی صفر هستند.

در این مقاله به کمک اندازه ی نافشردگی شرایط لازم برای وجود جواب دستگاه معادلات انتگرال-دیفرانسیل زیر را بررسی می کنیم.

$$x(\varsigma) = f\Big(\varsigma, x(\varsigma), \int_0^{\varsigma} k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\Big), \quad \varsigma \in [0,1]. \qquad (1)$$

۲ پیش نیازها

تعریف ۱.۲. اگر X یک فضای باناخ باشد. M_X را خانواده ی تمام زیر مجموعه های غیر تهی و کران دار از X و N_X زیرخانواده ای شامل تمام مجموعه های پیش فشرده در X تعریف می کنیم. آن گاه نگاشت $\mu : M_X \longrightarrow [0,+\infty]$ یک اندازه ی نافشردگی می نامیم اگر در شرط های زیر صدق کند:

(i) مجموعه ی $ker\mu := M_X \longrightarrow [0,+\infty]$ ناتهی و زیر مجموعه ی N_X باشد.

(ii) $B_1 \subseteq B_2 \Longrightarrow \mu(B_1) \leq \mu(B_2)$.

[۱] سخنران

(iii) $\mu(\overline{B}) = \mu(B)$.

(iv) $\mu(ConvB) = \mu(B)$.

(v) به ازای هر $\lambda \in [۰,۱]$ و $B_۱, B_۲ \in M_X$ داشته باشیم

$$\mu(\lambda B_۱ + (۱-\lambda)B_۲) \leq \lambda\mu(B_۱) + (۱-\lambda)\mu(B_۱).$$

(vi) اگر $\{B_n\}$ یک دنباله از مجموعه های بسته در M_X باشد به طوری که $B_{n+۱} \subseteq B_n$ و $\lim_{n\to\infty}\mu(B_n) = ۰$ در این صورت $\cap_{n=۱}^{\infty} B_n$ غیرتهی است.

قضیه ۲.۲. فرض کنید Ω یک زیرمجموعه ی ناتهی، کران دار و محدب از فضای باناخ X باشد. اگر برای خود نگاشت پیوسته ی F روی Ω و هر زیرمجموعه ی غیر تهی Y از Ω، ثابت مثبت کمتر از یک k وجود داشته باشد به طوری که برای اندازه ی نافشرده ی μ روی X داشته باشیم

$$\mu(FY) \leq k\mu(Y).$$

آن گاه F دارای یک نقطه ثابت است. [۲]

قضیه ۳.۲. اگر k عددی صحیح نامنفی و F زیرمجموعه ی کران دار از $C^k(\Omega)$ باشد. برای هر $f \in F$ ، $\varepsilon > ۰$ و $\alpha \in \mathbb{R}^n$ به طوری که

$$\begin{aligned}
\omega^\alpha(f,\varepsilon) &= \sup\{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| : x,y \in \Omega, \|x-y\| \leq \varepsilon\},\\
\omega(f,\varepsilon) &= \sup\{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| : x,y \in \Omega, \|x-y\| \leq \varepsilon, ۰ \leq |\alpha| \leq k\},\\
\omega(F,\varepsilon) &= \sup\{\omega(f,\varepsilon) : f \in F\}.
\end{aligned}$$

آن گاه $\omega_* : \mu_{C^k(\Omega)} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی

$$\omega_*(F) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow ۰} \omega(F,\varepsilon). \tag{۲}$$

یک اندازه ی نافشرده ی کامل روی $C^k(\Omega)$ است. [۱]

۳ احکام اصلی

معادله ی انتگرال-دیفرانسیل (۱) با شرایط زیر روی $C^۱([۰,۱])$ در نظر بگیرید:

(i) $f : [۰,۱] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته با مشتقات مرتبه ی اول پیوسته می باشد.

(ii) $\vartheta : [۰,۱] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته با شرط زیر می باشد:

$$|\vartheta(\wp,x,y)| \leq a(\wp)\xi(\max\{|x|,|y|\}) \qquad \forall\wp \in [۰,۱], (x,y) \in \mathbb{R}^۲. \tag{۳}$$

$a : [۰,۱] \longrightarrow [۰,+\infty]$ تابعی پیوسته است و $\xi : [۰,+\infty] \longrightarrow [۰,+\infty]$ تابعی غیرنزولی است.

(iii) $k, \dfrac{\partial k}{\partial \varsigma} : [۰,۱] \times [۰,۱] \longrightarrow \mathbb{R}$ توابعی پیوسته هستند.

(iv) برای تابع $f = f(\varsigma,x,y)$، ثابت های مثبت $L_۱,..,L_۷$ وجود دارند به طوری که:

$$|\frac{\partial f}{\partial x}| \leq L_۱,\ |\frac{\partial f}{\partial y}| \leq L_۲,\ |\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}| \leq L_۳,\ |\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}| \leq L_۴,\ |\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}| \leq L_۵,\ |\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial \varsigma}| \leq L_۶,\ |\frac{\partial^۲ f}{\partial \varsigma \partial y}| \leq L_۷.$$

(v) با توجه به تعاریف زیر

$$\begin{aligned}
&f_0 := \max\Big\{\sup\Big\{|f(\varsigma,0,0)| : \varsigma\in[0,1]\Big\},\ \sup\Big\{|\frac{\partial f}{\partial\varsigma}(\varsigma,0,0)| : \varsigma\in[0,1]\Big\}\Big\},\\
&M := \max\Big\{\|k\|_{C^1(\Omega)}, \|\frac{\partial k}{\partial\varsigma}\|_{C^1(\Omega)},\ \Omega=[0,1]^2\Big\},\\
&a^+ := \sup\Big\{|a(\wp)| : \wp\in[0,1]\Big\}.
\end{aligned}$$

ثابت مثبت r_0، وجود داشته باشد به طوریکه داشته باشیم

$$\frac{a^+M\xi(r_0)(L_7+2L_2)+f_0}{1-(L_1+L_6)}\le r_0,$$

و

$$L_1+L_6+L_3r_0+2a^+L_4M\xi(r_0)<1.$$

قضیه ۱.۳. معادله ی انتگرال–دیفرانسیل (۱) با شرایط $(i)-(v)$ روی $C^1([0,1])$ دارای حداقل یک نقطه ثابت است.

اثبات. عملگر T روی فضای $C^1([0,1])$ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(Tx)(\varsigma)=f\big(\varsigma,x(\varsigma),\int_0^\varsigma k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big).$$

ابتدا باید ثابت کنیم که T روی $B_{r_0}=\{x\in C^1([0,1]) : \|x\|_{c^1([0,1])}\le r_0\}$ یک خودنگاشت است. بنابراین با استفاده از شرط (v) داریم:

$$\begin{aligned}
|(Tx)(\varsigma)| &\le \Big|f\big(\varsigma,x(\varsigma),\int_0^\varsigma k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)-f(\varsigma,0,0)\Big|+|f(\varsigma,0,0)|\\
&\le L_1|x(\varsigma)|+L_2\int_0^\varsigma|k(\varsigma,\wp)\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))|\,d\wp+f_0\\
&\le L_1r_0+a^+L_2M\xi(r_0)+f_0.
\end{aligned}\tag{4}$$

و

$$\begin{aligned}
|(Tx)'(\varsigma)| =&\Big|f_\varsigma\big(\varsigma,x(\varsigma),\int_0^\varsigma k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)+x'(\varsigma)f_x\big(\varsigma,x(\varsigma),\int_0^\varsigma k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)\\
&+k(\varsigma,\varsigma)\vartheta(\varsigma,x(\varsigma),x'(\varsigma))f_y\big(\varsigma,x(\varsigma),\int_0^\varsigma k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)\\
&+f_y\big(\varsigma,x(\varsigma),\int_0^\varsigma k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)\int_0^\varsigma k_\varsigma(\varsigma,\wp)\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\\
&-f_\varsigma(\varsigma,0,0)+f_\varsigma(\varsigma,0,0)\Big|\\
\le\ & L_7\Big|\int_0^\varsigma k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\Big|+L_6|x(\varsigma)|+L_1|x'(\varsigma)|+f_0+2a^+L_2M\xi(r_0)\\
\le\ & a^+L_7M\xi(r_0)+(L_1+L_6)r_0+f_0+2a^+L_2M\xi(r_0)\\
=\ & a^+M\xi(r_0)(L_7+2L_2)+f_0+(L_1+L_6)r_0.
\end{aligned}\tag{5}$$

در نتیجه خودنگاشت بودن عملگر T روی B_{r_0} اثبات می گردد. اثبات پیوستگی Tx برای هر $x\in C^1([0,1])$ بدیهی است. همچنین بنابر شرایط $(i)-(iii)$, عملگر Tx دارای مشتق پیوسته است. حال به اثبات پیوستگی T روی B_{r_0} می پردازیم. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله ای همگرا به

$x \in B_{r_\circ}$ باشد. برای هر $\varepsilon > \circ$، وجود دارد $N > \circ$ به طوری که برای هر $n > N$ داشته باشیم $\|x_n - x\|_{C^\backslash([\circ,\backslash])} \leq \varepsilon$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
|(Tx_n)(\varsigma) - (Tx)(\varsigma)| &= \Big| f\big(\varsigma, x_n(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp))\, d\wp\big) \\
&\quad - f\big(\varsigma, x(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp)) d\wp\big) \Big| \\
&\leq L_\backslash |x_n(\varsigma) - x(\varsigma)| + L_\text{۲} \Big| \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp) \, \Big(\vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp)) - \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\Big)\, d\wp \Big| \\
&\leq L_\backslash |x_n(\varsigma) - x(\varsigma)| + L_\text{۲} \int_\circ^\varsigma M |\vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp)) - \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))|\, d\wp \\
&\leq L_\backslash \varepsilon + L_\text{۲} M V^{(\varepsilon)},
\end{aligned}$$

به طوری که

$$V^{(\varepsilon)} = \sup\{|\vartheta(\wp, x_\backslash, y_\backslash) - \vartheta(\wp, x_\text{۲}, y_\text{۲})|; x_\backslash, x_\text{۲}, y_\backslash, y_\text{۲} \in B_{r_\circ}, |x_\backslash - x_\text{۲}| < \varepsilon, |y_\backslash - y_\text{۲}| < \varepsilon, \wp \in [\circ, \backslash]\}. \qquad (۶)$$

اکنون به کمک پیوستگی یکنواخت تابع ϑ روی $[-r_\circ, r_\circ] \times [-r_\circ, r_\circ] \times [\circ, \backslash]$ نتیجه می گیریم: $\lim_{\varepsilon \longrightarrow \circ} V^{(\varepsilon)} = \circ$ پس اگر $x_n \longrightarrow x$ خواهیم داشت $|(Tx_n)(\varsigma) - (Tx)(\varsigma)| \longrightarrow \circ$. اکنون لازم است عبارت زیر را محاسبه کنیم.

$$|(Tx_n)'(\varsigma) - (Tx)'(\varsigma)| \leq I_\backslash + I_\text{۲} + I_\text{۳} + I_\text{۴},$$

که در این جا از تعاریف زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned}
I_\backslash :=& \Big| f_\varsigma\big(\varsigma, x_n(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp))\, d\wp\big) - f_\varsigma\big(\varsigma, x(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \Big|, \\
I_\text{۲} :=& \Big| x_n'(\varsigma) f_x\big(\varsigma, x_n(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp))\, d\wp\big) - x'(\varsigma) f_x\big(\varsigma, x(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \Big|, \\
I_\text{۳} :=& \Big| k(\varsigma,\varsigma) \vartheta(\varsigma, x_n(\varsigma), x_n'(\varsigma)) f_y\big(\varsigma, x_n(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp))\, d\wp\big) \\
&- k(\varsigma,\varsigma)\, \vartheta(\varsigma, x(\varsigma), x'(\varsigma)) f_y\big(\varsigma, x(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \Big|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_\text{۴} :=& \Big| f_y\big(\varsigma, x_n(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp) \vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp)) d\wp\big) \int_\circ^\varsigma k_\varsigma(\varsigma,\wp) \vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp))\, d\wp \\
&- f_y\big(\varsigma, x(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp) \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp)) d\wp\big) \int_\circ^\varsigma k_\varsigma(\varsigma,\wp) \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \Big|.
\end{aligned}$$

اکنون تقریب های زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
I_\backslash \leq& L_\text{۷} \Big| \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp) \vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp))\, d\wp - \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp) \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \Big| + L_\text{۶} |x_n(\varsigma) - x(\varsigma)| \\
\leq& L_\text{۷} M V^{(\varepsilon)} + L_\text{۶} \varepsilon;
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
I_\text{۲} \leq& \Big| x_n'(\varsigma) f_x\big(\varsigma, x_n(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x_n(\wp), x_n'(\wp))\, d\wp\big) - x_n'(\varsigma) f_x\big(\varsigma, x(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\varsigma))\, d\wp\big) \Big| \\
&+ \Big| x_n'(\varsigma) f_x\big(\varsigma, x(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\varsigma))\, d\wp\big) - x'(\varsigma) f_x\big(\varsigma, x(\varsigma), \int_\circ^\varsigma k(\varsigma,\wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\varsigma))\, d\wp\big) \Big| \\
\leq& |x_n'(\varsigma)| \Big(L_\text{۳} |x_n(\varsigma) - x(\varsigma)| + L_\text{۴} M V^{(\varepsilon)} \Big) + L_\backslash |x_n'(\varsigma) - x'(\varsigma)| \\
\leq& r_\circ (L_\text{۳} \varepsilon + L_\text{۴} M V^{(\varepsilon)}) + L_\backslash \varepsilon.
\end{aligned}$$

بعلاوه

$$
\begin{aligned}
I_3 \leq & \Big| k(\varsigma,\varsigma)\vartheta(\varsigma,x_n(\varsigma),x_n'(\varsigma)) f_y\big(\varsigma,x_n(\varsigma),\int_0^{\varsigma} k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x_n(\wp),x_n'(\wp))\,d\wp\big) \\
& - k(\varsigma,\varsigma)\vartheta(\varsigma,x(\varsigma),x'(\varsigma)) f_y\big(\varsigma,x_n(\varsigma),\int_0^{\varsigma} k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x_n(\wp),x_n'(\wp))\,d\wp\big)\Big| \\
& + \Big| k(\varsigma,\varsigma)\vartheta(\varsigma,x(\varsigma),x'(\varsigma)) f_y\big(\varsigma,x_n(\varsigma),\int_0^{\varsigma} k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x_n(\wp),x_n'(\wp))\,d\wp\big) \\
& - k(\varsigma,\varsigma)\vartheta(\varsigma,x(\varsigma),x'(\varsigma)) f_y\big(\varsigma,x(\varsigma),\int_0^{\varsigma} k(\varsigma,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)\Big| \\
\leq & MV^{(\varepsilon)}L_2 + Ma^+\xi(r_0)\Big(L_4\varepsilon + L_5 MV^{(\varepsilon)}\Big);
\end{aligned}
$$

و به طور مشابه داریم

$$
I_4 \leq L_2 MV^{(\varepsilon)} + Ma^+\xi(r_0)\Big(L_4\varepsilon + ML_5V^{(\varepsilon)}\Big).
$$

بنابراین اگر $n \longrightarrow \infty$ نتیجه می گیریم $|(Tx_n)'(\varsigma) - (Tx)'(\varsigma)| \longrightarrow 0$، و $\|(Tx_n)'(\varsigma) - (Tx)'(\varsigma)\|_{C^1([0,1])} \longrightarrow 0$. پس اثبات پیوستگی کامل می شود. در ادامه برای زیرمجموعه ی کران دار $Y \in B_{r_0}$ باید ارتباطی بین $\omega_*(Y)$ و $\omega_*(TY)$ بیابیم. برای این هدف فرض کنید $x \in Y$ و $\varsigma_1,\varsigma_2 \in [0,1]$ در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
|(Tx)(\varsigma_2) - (Tx)(\varsigma_1)| = & \Big| f\big(\varsigma_2,x(\varsigma_2),\int_0^{\varsigma_2} k(\varsigma_2,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big) \\
& - f\big(\varsigma_1,x(\varsigma_1),\int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_1,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)\Big| \\
\leq & \Big| f\big(\varsigma_2,x(\varsigma_2),\int_0^{\varsigma_2} k(\varsigma_2,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big) \\
& - f\big(\varsigma_2,x(\varsigma_1),\int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_1,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)\Big| \\
& + \Big| f\big(\varsigma_2,x(\varsigma_1),\int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_1,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big) \\
& - f\big(\varsigma_1,x(\varsigma_1),\int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_1,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,d\wp\big)\Big| \\
\leq & L_2\Big|\int_0^{\varsigma_2} \vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,k(\varsigma_2,\wp)\,d\wp - \int_0^{\varsigma_1} \vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,k(\varsigma_1,\wp)\,d\wp\Big| \\
& + L_1|x(\varsigma_2) - x(\varsigma_1)| + f^{(\varepsilon)} \\
\leq & L_2\Big|\int_0^{\varsigma_2} \vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))\,\big(k(\varsigma_2,\wp) - k(\varsigma_1,\wp)\big)\,d\wp\Big| + L_2\int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2} |k(\varsigma_1,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x'(\wp))|\,d\wp \\
& + L_1|x(\varsigma_2) - x(\varsigma_1)| + f^{(\varepsilon)} \\
\leq & L_2a^+\xi(r_0)K^{(\varsigma,\varepsilon)} + L_2Ma^+\xi(r_0)\varepsilon + L_1|x(\varsigma_2) - x(\varsigma_1)| + f^{(\varepsilon)},
\end{aligned}
$$

که در اینجا از تعاریف زیر بهره گرفته ایم:

$$
\begin{aligned}
f^{(\varepsilon)} &:= \sup\{|f(\varsigma_1,x,y) - f(\varsigma_2,x,y)|; |\varsigma_2 - \varsigma_1| < \varepsilon, x \in \big[-r_0,r_0\big], |y| \leq Ma^+\xi(r_0)\}, \\
K^{(\varsigma,\varepsilon)} &:= \sup\{|k(\varsigma_2,\wp) - k(\varsigma_1,\wp)|; |\varsigma_2 - \varsigma_1| < \varepsilon, \wp \in \big[0,1\big]\}.
\end{aligned}
$$

بنابراین می توان نتیجه گرفت:

$$
\omega^{0}(Tx,\varepsilon) \leq L_2a^+\xi(r_0)K^{(\varsigma,\varepsilon)} + L_2Ma^+\xi(r_0)\varepsilon + L_1\omega^{0}(x,\varepsilon) + f^{(\varepsilon)}. \tag{7}
$$

همچنین به تقریب عبارت زیر نیاز داریم:

$$|(Tx)^{'}(\varsigma_{۲})-(Tx)^{'}(\varsigma_{۱})|\leq J_{۱}+J_{۲}+J_{۳}+J_{۴}, \tag{۸}$$

که در اینجا از تعاریف زیر استفاده کرده ایم:

$$\begin{aligned}
J_{۱}:=&\big|f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۲}}k(\varsigma_{۲},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
&-f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۱},x(\varsigma_{۱}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\big|,\\
J_{۲}:=&\big|x^{'}(\varsigma_{۲})f_{x}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۲}}k(\varsigma_{۲},\wp)\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
&-x^{'}(\varsigma_{۱})f_{x}\big(\varsigma_{۱},x(\varsigma_{۱}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\big|,\\
J_{۳}:=&\big|k(\varsigma_{۲},\varsigma_{۲})\,\vartheta(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),x^{'}(\varsigma_{۲}))\;f_{y}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۲}}k(\varsigma_{۲},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
&-k(\varsigma_{۱},\varsigma_{۱})\,\vartheta(\varsigma_{۱},x(\varsigma_{۱}),x^{'}(\varsigma_{۱}))\;f_{y}\big(\varsigma_{۱},x(\varsigma_{۱}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\big|,\\
J_{۴}:=&\big|f_{y}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۲}}k(\varsigma_{۲},\wp)\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\int_{۰}^{\varsigma_{۲}}k_{\varsigma}(\varsigma_{۲},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\\
&-f_{y}\big(\varsigma_{۱},x(\varsigma_{۱}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k_{\varsigma}(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\,\big|.
\end{aligned}$$

بنابراین $J_{i};i=۱,...,۴$ را می توانیم به صورت زیر تخمین بزنیم:

$$\begin{aligned}
J_{۱}\leq&\Big|f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۲}}k(\varsigma_{۲},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)-f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۲},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
&+f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۲},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)-f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
&+f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۲},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)-f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۱},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
&+f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۱},x(\varsigma_{۲}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)-f_{\varsigma}\big(\varsigma_{۱},x(\varsigma_{۱}),\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}k(\varsigma_{۱},\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\Big|\\
\leq&L_{۷}\int_{\varsigma_{۱}}^{\varsigma_{۲}}|k(\varsigma_{۲},\wp)\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))|\,d\wp+L_{۷}\big|\int_{۰}^{\varsigma_{۱}}\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\Big(k(\varsigma_{۲},\wp)-k(\varsigma_{۱},\wp)\Big)\,d\wp\big|\\
&+f^{(\varsigma,\varepsilon)}+L_{۶}|x(\varsigma_{۲})-x(\varsigma_{۱})|\\
\leq&L_{۷}M\varepsilon a^{+}\xi(r_{۰})+L_{۷}K^{(\varsigma,\varepsilon)}a^{+}\xi(r_{۰})+f^{(\varsigma,\varepsilon)}+L_{۶}|x(\varsigma_{۲})-x(\varsigma_{۱})|,
\end{aligned} \tag{۹}$$

در اینجا

$$f^{(\varsigma,\varepsilon)}:=\sup\{|f_{\varsigma}(\varsigma_{۱},x,y)-f_{\varsigma}(\varsigma_{۲},x,y)|:|\varsigma_{۲}-\varsigma_{۱}|<\varepsilon,x\in\big[-r_{۰},r_{۰}\big],|y|\leq Ma^{+}\xi(r_{۰})\}.$$

$$
\begin{aligned}
J_۲ \leq & \big|x^{'}(\varsigma_۲) f_x\big(\varsigma_۲, x(\varsigma_۲), \int_۰^{\varsigma_۲} k(\varsigma_۲, \wp)\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))\, d\wp\big) \\
& - x^{'}(\varsigma_۲) f_x\big(\varsigma_۲, x(\varsigma_۱), \int_۰^{\varsigma_۱} k(\varsigma_۲, \wp)\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))\, d\wp\big)\big| \\
& + \big|x^{'}(\varsigma_۲) f_x\big(\varsigma_۲, x(\varsigma_۱), \int_۰^{\varsigma_۱} k(\varsigma_۲, \wp)\,\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))\, d\wp\big) \\
& - x^{'}(\varsigma_۲) f_x\big(\varsigma_۲, x(\varsigma_۱), \int_۰^{\varsigma_۱} k(\varsigma_۱, \wp)\,\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))\, d\wp\big)\big| \\
& + \big|x^{'}(\varsigma_۲) f_x\big(\varsigma_۲, x(\varsigma_۱), \int_۰^{\varsigma_۱} k(\varsigma_۱, \wp)\,\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))\, d\wp\big) \\
& - x^{'}(\varsigma_۱) f_x\big(\varsigma_۲, x(\varsigma_۱), \int_۰^{\varsigma_۱} k(\varsigma_۱, \wp)\,\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))\, d\wp\big)\big| \\
& + \big|x^{'}(\varsigma_۱) f_x\big(\varsigma_۲, x(\varsigma_۱), \int_۰^{\varsigma_۱} k(\varsigma_۱, \wp)\,\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))\, d\wp\big) \\
& - x^{'}(\varsigma_۱) f_x\big(\varsigma_۱, x(\varsigma_۱), \int_۰^{\varsigma_۱} k(\varsigma_۱, \wp)\,\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))\, d\wp\big)\big|
\end{aligned}
$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$
\begin{aligned}
J_۲ \leq & |x^{'}(\varsigma_۲)|\Big(L_۳|x(\varsigma_۲) - x(\varsigma_۱)| \qquad (۱۰)\\
& + L_۴ \int_{\varsigma_۱}^{\varsigma_۲} |k(\varsigma_۲, \wp)\,\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))|\, d\wp\Big) \\
& + L_۴|x^{'}(\varsigma_۲)| \int_۰^{\varsigma_۱} |\vartheta(\wp, x(\wp), x^{'}(\wp))||k(\varsigma_۲, \wp) - k(\varsigma_۱, \wp)|\, d\wp \\
& + L_۱|x^{'}(\varsigma_۲) - x^{'}(\varsigma_۱)| + L_۶|x^{'}(\varsigma_۱)||\varsigma_۲ - \varsigma_۱| \\
\leq & L_۳ r_۰ |x(\varsigma_۲) - x(\varsigma_۱)| + L_۴ r_۰ a^{+} \xi(r_۰)(M\varepsilon + K^{(\varsigma,\varepsilon)}) \\
& + L_۱|x^{'}(\varsigma_۲) - x^{'}(\varsigma_۱)| + L_۶ r_۰ \varepsilon. \qquad (۱۱)
\end{aligned}
$$

بعلاوه،

$$\begin{aligned}
J_۳ \leq & \Big|k(\varsigma_۲,\varsigma_۲)\,\vartheta(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),x^{'}(\varsigma_۲))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),\int_{۰}^{\varsigma_۲}k(\varsigma_۲,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
& -k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\,\vartheta(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),x^{'}(\varsigma_۲))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),\int_{۰}^{\varsigma_۲}k(\varsigma_۲,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\Big|\\
& +\Big|k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\vartheta(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),x^{'}(\varsigma_۲))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),\int_{۰}^{\varsigma_۲}k(\varsigma_۲,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
& -k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\,\vartheta(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),x^{'}(\varsigma_۱))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),\int_{۰}^{\varsigma_۲}k(\varsigma_۲,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\Big|\\
& +\Big|k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\vartheta(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),x^{'}(\varsigma_۱))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),\int_{۰}^{\varsigma_۲}k(\varsigma_۲,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
& -k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\,\vartheta(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),x^{'}(\varsigma_۱))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۱),\int_{۰}^{\varsigma_۱}k(\varsigma_۲,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\Big|\\
& +\Big|k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\vartheta(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),x^{'}(\varsigma_۱))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۱),\int_{۰}^{\varsigma_۱}k(\varsigma_۲,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
& -k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\,\vartheta(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),x^{'}(\varsigma_۱))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۱),\int_{۰}^{\varsigma_۱}k(\varsigma_۱,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\Big|\\
& +\Big|k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\vartheta(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),x^{'}(\varsigma_۱))\,f_y\big(\varsigma_۲,x(\varsigma_۱),\int_{۰}^{\varsigma_۱}k(\varsigma_۱,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\\
& -k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)\;\vartheta(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),x^{'}(\varsigma_۱))\,f_y\big(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),\int_{۰}^{\varsigma_۱}k(\varsigma_۱,\wp)\,\vartheta(\wp,x(\wp),x^{'}(\wp))\,d\wp\big)\Big|.
\end{aligned}$$

سپس،

$$\begin{aligned}
J_۳ \leq & L_۲a^+\xi(r_۰)|k(\varsigma_۲,\varsigma_۲)-k(\varsigma_۱,\varsigma_۱)|+ML_۲|\vartheta(\varsigma_۲,x(\varsigma_۲),x^{'}(\varsigma_۲))-\vartheta(\varsigma_۱,x(\varsigma_۱),x^{'}(\varsigma_۱))|\\
& +Ma^+\xi(r_۰)\Big(L_۴|x(\varsigma_۲)-x(\varsigma_۱)|+L_۵Ma^+|\varsigma_۲-\varsigma_۱|\xi(r_۰)\Big)\\
& +ML_۵a^+\xi(r_۰)\int_{۰}^{\varsigma_۱}a^+\xi(r_۰)|k(\varsigma_۲,\wp)-k(\varsigma_۱,\wp)|\,d\wp+ML_۷a^+\xi(r_۰)|\varsigma_۲-\varsigma_۱|\\
\leq & L_۲a^+\xi(r_۰)\big(K^{(\varsigma,\varepsilon)}+K^{(\wp,\varepsilon)}\big)+ML_۲\big(V^{(\varepsilon)}+V^{(\varsigma,\varepsilon)}\big)\\
& +Ma^+\xi(r_۰)\Big(L_۴|x(\varsigma_۲)-x(\varsigma_۱)|+L_۵Ma^+\varepsilon\xi(r_۰)\Big)\\
& +ML_۵(a^+\xi(r_۰))^۲K^{(\varsigma,\varepsilon)}+ML_۷a^+\xi(r_۰)\varepsilon; \qquad (۱۲)
\end{aligned}$$

که در آن داریم

$$V^{(\varsigma,\varepsilon)}:=\sup\{|\vartheta(\varsigma_۱,x,y)-\vartheta(\varsigma_۲,x,y);|\varsigma_۲-\varsigma_۱|\leq\varepsilon,x,y\in B_{r_۰}\},$$

و

$$K^{(\wp,\varepsilon)}:=\sup\{|k(\varsigma,\wp_۱)-k(\varsigma,\wp_۲)|;|\wp_۲-\wp_۱|<\varepsilon,\varsigma\in[۰,۱]\}.$$

در نهایت به محاسبه ی J_4 می پردازیم:

$$\begin{aligned}
J_4 \leq & \Big| f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_2), \int_0^{\varsigma_2} k(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_2} k_\varsigma(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \\
& - f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_2), \int_0^{\varsigma_2} k(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \Big| \\
& + \Big| f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_2), \int_0^{\varsigma_2} k(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \\
& - f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_2), \int_0^{\varsigma_2} k(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \Big| \\
& + \Big| f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_2), \int_0^{\varsigma_2} k(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \\
& - f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_1), \int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \Big| \\
& + \Big| f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_1), \int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_2, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \\
& - f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_1), \int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \Big| \\
& + \Big| f_y\big(\varsigma_2, x(\varsigma_1), \int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \\
& - f_y\big(\varsigma_1, x(\varsigma_1), \int_0^{\varsigma_1} k(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp\big) \int_0^{\varsigma_1} k_\varsigma(\varsigma_1, \wp)\, \vartheta(\wp, x(\wp), x'(\wp))\, d\wp \Big|.
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}
J_4 \leq & L_2 M a^+ \xi(r_0) \varepsilon + L_2 K_\varsigma^{(\varepsilon)} a^+ \xi(r_0) \\
& + M a^+ \xi(r_0) \big(L_4 |x(\varsigma_2) - x(\varsigma_1)| + L_5 M a^+ \xi(r_0) \varepsilon \big) \\
& + L_5 M (a^+ \xi(r_0))^2 K^{(\varsigma, \varepsilon)} + L_7 M a^+ \xi(r_0) \varepsilon; \qquad (۱۳)
\end{aligned}$$

که در آن

$$K_\varsigma^{(\varepsilon)} := \sup\{ |k_\varsigma(\varsigma_1, \wp) - k_\varsigma(\varsigma_2, \wp)| : |\varsigma_2 - \varsigma_1| < \varepsilon, \wp \in [0, 1] \}.$$

حال با استفاده از (۸)–(۱۳) نتیجه خواهیم گرفت:

$$\begin{aligned}
\omega^1(Tx, \varepsilon) \leq & L_7 M \varepsilon a^+ \xi(r_0) + L_7 K^{(\varsigma, \varepsilon)} a^+ \xi(r_0) + f^{(\varsigma, \varepsilon)} + L_6 |x(\varsigma_2) - x(\varsigma_1)| \\
& + L_3 r_0 |x(\varsigma_2) - x(\varsigma_1)| + L_4 r_0 a^+ \xi(r_0) (M \varepsilon + K^{(\varsigma, \varepsilon)}) \\
& + L_1 |x'(\varsigma_2) - x'(\varsigma_1)| + L_6 r_0 \varepsilon \\
& + L_2 a^+ \xi(r_0) \big(K^{(\varsigma, \varepsilon)} + K^{(\wp, \varepsilon)} \big) + M L_2 \big(V^{(\varepsilon)} + V^{(\varsigma, \varepsilon)} \big) \\
& + M a^+ \xi(r_0) \big(L_4 |x(\varsigma_2) - x(\varsigma_1)| + L_5 M a^+ \varepsilon \xi(r_0) \big) \\
& + M L_5 (a^+ \xi(r_0))^2 K^{(\varsigma, \varepsilon)} + M L_7 a^+ \xi(r_0) \varepsilon \\
& + L_2 M a^+ \xi(r_0) \varepsilon + L_2 K_\varsigma^{(\varepsilon)} a^+ \xi(r_0) \\
& + M a^+ \xi(r_0) \big(L_4 |x(\varsigma_2) - x(\varsigma_1)| + L_5 M a^+ \xi(r_0) \varepsilon \big) \\
& + L_5 M (a^+ \xi(r_0))^2 K^{(\varsigma, \varepsilon)} + L_7 M a^+ \xi(r_0) \varepsilon. \qquad (۱۴)
\end{aligned}$$

همچنین از روابط (۷) و (۱۴) استنباط می شود

$$\omega_*(TY) \leq (L_1 + L_6 + L_3 r_0 + 2 M L_4 a^+ \xi(r_0))\, \omega_*(Y). \qquad (۱۵)$$

حال کافی است $\alpha := L_۱ + L_۶ + L_۳ r_۰ + ۲ML_۴ a^+ \xi(r_۰)$ در نظر بگیریم و با به کار بردن شرط (vi) و قضیه ی (۲.۲) وجود جواب اثبات می گردد. □

مثال ۲.۳. معادله انتگرال-دیفرانسیل زیر

$$x(\varsigma) = \frac{\varsigma}{\varsigma^۳ + ۲} + \frac{x(\varsigma)}{\varsigma^۳ + ۲} + \int_۰^{\varsigma} \frac{(\varsigma - \varsigma^۲)\wp \ \sin(x(\wp) + x'(\wp))}{(۹ + e^{\varsigma})} d\wp \tag{۱۶}$$

یک مثال از معادله ی (۱) می باشد.

اثبات. در نظر بگیرید $f(\varsigma, x, y) = \frac{\varsigma}{\varsigma^۳ + ۲} + \frac{x}{\varsigma^۳ + ۲} + y,$ $k(\varsigma, \wp) = \frac{\wp(\varsigma - \varsigma^۲)}{۹ + e^{\varsigma}},$ و $\vartheta(\wp, x, y) = \sin(x + y).$ با در نظر گرفتن $a(\wp) = ۱,$ $\xi(x) = ۲x,$ $L_۲ = ۱,$ $L_۱ = ۰/۵,$ $L_۳ = L_۴ = L_۵ = L_۷ = ۰,$ $L_۶ = \frac{۱}{۳},$ $f_۰ = ۰/۵$ و $M = ۰/۰۲۵$، بنابراین برای $r_۰ \leq ۴/۲۹$. تمامی شرایط قضیه ی (۱.۳) برقرار است. □

مراجع

[1] R. Arab, R. Allahyari, and A. Shole Haghighi, Construction of measures of noncompactness of $C^k(\Omega)$ and C_0^k and their application to functional integral-differential equations, Bull. Iran. Math. Soc. 43 (1) (2017) 53–67.

[2] G. Darbo, Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 24 (1955) 84-92.

پست الکترونیکی: hengamehtamimi@gmail.com
پست الکترونیکی: ssaiedinezhad@iust.ac.ir
پست الکترونیکی: mghaemi@iust.ac.ir