

(حل عددی معادلات پانتوگراف مرتبه اول غیر خطی کسری با استفاده از روش عملیاتی موجک هار)

عبدالرضا مومنی*، دکتر کاظم نوری†، دکتر لیلا ترک زاده‡

۱- دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان

۲- عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان

۳- عضو هیئت علمی گروه ریاضی دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر دانشگاه سمنان

چکیده

معادلات دیفرانسیل کاربردهای زیادی در علوم مهندسی دارند. با این حال روشهای تحلیلی که برای حل این معادلات وجود دارند اغلب پیچیده و دشوار هستند. الگوریتم های محدودی نیز برای حل عددی این معادلات پیشنهاد شده اند.

در حل معادلات دیفرانسیل، از مزایای مهم روش موجک هار، سادگی و هزینه محاسباتی خیلی کم آن است، چرا که ماتریس تبدیل هار، ماتریسی تُنک است. همچنین مزیت دیگر هم تعداد کم و قابل توجه ضرایب موجک است و لذا استفاده از آن خیلی آسان بوده و هزینه های محاسباتی را بسیار پایین می آورد. در این پژوهش به یک تحلیل و بررسی معادلات پانتوگراف[§] غیر خطی کسری به روش موجک هار (بخش مراجع [1-6])، پرداخته می شود و یک روش کارا و مؤثر برای حل این گونه از معادلات پیشنهاد شده و نتایج حاصل از این روش با جوابهای دقیق و یا واقعی، مقایسه می شود تا دقت و کارایی روش موجک هار برای حل اینگونه از معادلات نشان داده شود. معادلات پانتوگراف غیر خطی و کسری در بسیاری از مقالات علمی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است (بخش مراجع [7-23]). در اینجا هم یک روش مؤثر و کارا برای حل معادلات پانتوگراف غیر خطی کسری ارائه شده است و نتایج حاصل از آنها نیز به کمک موجک هار و حتی موجکهای دیگر مثل موجک لژاندر و موجک چیبیشف با هم قابل مقایسه است.

واژه‌های کلیدی: موجک، موجک هار، هار، معادلات پانتوگراف غیر خطی کسری، پانتوگراف غیر خطی، حل عددی.

۱- مقدمه و تعاریف

امروزه مطالعات زیادی برای گسترش روشهای جبری انجام می پذیرد که معادلات دیفرانسیل با مشتقات مرتبه کسری را مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهد، تا الگوریتم های مناسبی برای حل آنها ارائه شود. بیشتر این تلاشها بر پایه چندجمله ایها و توابع متعامد بنا شده اند. این روشهای عملیاتی براساس توابع والش، توابع بلاک پالس، چندجمله ایهای لاگر، چندجمله ایهای لژاندر، چندجمله ایهای چیبیشف، سری تیلور، سری فوریه و موجک ها انجام شده است.

موجک ها در ادامه تحقیقات فوریه مربوط به سیگنالها که به طور همزمان قادر به نگهداری اطلاعات مربوط به زمان و فرکانس نبودند وارد عرصه علم شدند. موجک ها دارای انواع متعددی از جمله هار، لژاندر، چیبیشف، هرمیت، لاگر و ... هستند. موجک هار اولین و ساده ترین آنها است. دقت بسیار بالای روش موجک و بویژه جوابهای موجک هار حتی در حالتی که تعداد نقاط گرهی و یا شبکه ای کم است، همواره مورد توجه بوده است.

تبدیل موجک (Wavelet Transform) یکی از تبدیلات مهم ریاضی است که در حوزه های مختلف علوم کاربرد دارد. ایده اصلی تبدیل موجک این است که بر ضعف ها و محدودیت های موجود در تبدیل فوریه غلبه کند. این تبدیل را بر خلاف تبدیل فوریه، می توان در مورد سیگنال های غیر ایستا و سیستم های دینامیک نیز مورد استفاده قرار داد. به دست آوردن جواب های کلاسیک معادلات دیفرانسیل همیشه امکان پذیر نبوده است و در خیلی موارد نیز تقریباً غیر ممکن بوده است. بنابراین برای حل اکثر معادلات دیفرانسیل باید از روش های تقریبی استفاده کرد.

اولین فایده موجکها به وسیله دانشمندی به نام آلفرد هار عرضه شد؛ او علاقمند به یافتن پایه ای شبیه به پایه تبدیلات فوریه در فضای گسسته برای هر فضای تابعی بود. در فیزیک موجکها، در توصیف حرکت براونی مورد استفاده واقع می شوند. انجام این کار منجر به پیدایش تعدادی نظریه گردید که در ساختن پایه موجک، مورد استفاده واقع شدند.

موجکها همچنین در تحلیل و توصیف حالات همسانی سیستم کوانتوم ویژه مفیدند؛ و بالاخره دانشمندی به نام استفان. مالات کشف کرد که در میدان انتشار سیگنالها، بانکهای فیلتر دارای ارتباطات بسیار مهمی با توابع پایه ای موجک هستند.

* . abdalrezamomeni@yahoo.com

† . knouri@semnan.ac.ir

‡ . torkzadeh@semnan.ac.ir

§ . Pantograph Equation

همچنین استفاده مستقیم از شرایط مرزی و اولیه در نوشتن بسط‌ها در روش موجکها و بویژه موجک هار و این که این شرایط مرزی به طور خودکار مورد توجه قرار می‌گیرند، سبب میشود که این روش در مقایسه با روشهای کلاسیک دیگر، کاملاً رقابتی و کارآمد باشد. روش موجک هار، به صورت آزاری خیلی کارا و مؤثر در حل عددی کلیه معادلات دیفرانسیل ظاهر شده است. همچنین توانایی انواع موجکهای دیگر (از جمله موجک لژاندار و چبیشف و لاگر) نیز در حل عددی انواع معادلات دیفرانسیل پدیدار گشته است. در این تحقیق به بررسی و تحلیل چند تا از معادلات دیفرانسیل پانتوگراف غیر خطی کسری با روش موجک هار پرداخته میشود. **تعریف:** پایه خانواده موجک هار یکنواخت* برای هر $t \in [A, B]$ ، و هر $i \geq 1$ ، به صورت زیر تعریف شده است:

$$h_1(t) = 1; A \leq t \leq B, h_i(t) = \begin{cases} 1 & ; \forall t \in [\xi_1, \xi_2) \\ -1 & ; \forall t \in [\xi_2, \xi_3) \\ 0 & \text{ElseWhere} \end{cases} \text{ for } i \geq 2 \quad (1-1)$$

که در اینجا داریم:

$$\xi_1 = A + (B - A) \frac{k}{m}, \xi_2 = A + (B - A) \frac{k+0.5}{m}, \xi_3 = A + (B - A) \frac{k+1}{m}$$

که در اینجا عدد صحیح $m = 2^j; (j = 0, 1, 2, \dots, J)$ نشان دهنده سطحی از موجک است و $k = 0, 1, \dots, m - 1$ نیز پارامتر انتقال است. عدد صحیح J نیز، تعیین کننده اتساع به اندازه 2^J می باشد که اصطلاحاً آن را میزان ظرافت نیز می نامند؛ اندیس i در رابطه فوق بر طبق فرمول $i = m + k + 1$ محاسبه می شود، در حالت مقادیر مینیمال $k = 0, m = 1$ داریم: $i = 2$ ؛ به عبارت دیگر می نیمم مقدار i ؛ یعنی 2 به ازای $k = 0, m = 1$ ، است. همچنین $i = 2M = 2^{J+1}$ مقدار ماکزیمم i می باشد. همچنین فرض می شود که مقدار $i = 1$ با تابع مقیاس $h_1 \equiv 1$ در بازه $[0, 1]$ متناظر است، که تابع مشخصه نامیده شده و به این صورت تعریف می شود:

$$h_1(t) = \chi_{[0,1]} = \begin{cases} 1 & \forall t \in [0, 1) \\ 0 & \text{else where} \end{cases}$$

که همان تابع مشخصه می باشد. حال با فرض انتگرالگیری از موجکهای هار در رابطه (1-1) داریم:

$$q_i(t) = \int_0^t h_i(t) dt$$

پس اگر داشته باشیم: $Q(i, l) = q_i(t_l)$ ، آنگاه در این صورت، ماتریس $2M$ بعدی P ، به طوری که: $Q = PH$ را ماتریس عملگر انتگرالگیری می نامیم که چن و هسیائو در بخش مرجع [5,6] معرفی کردند.

آنها نشان دادند که برای محاسبه چنین ماتریسی از مرتبه μ ، معادله ماتریسی زیر برقرار است:

$$P_\mu = \begin{bmatrix} P_{0.5\mu} & -\frac{1}{2\mu} H_{0.5\mu} \\ \frac{1}{2\mu} H_{0.5\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

تعریف: پایه خانواده موجکهای هار غیر یکنواخت i ام* را برای هر $x \in [A, B]$ و هر $i \geq 1$ به شکل زیر است:

$$h_1(x) = 1, h_i(x) = \begin{cases} 1 & ; \forall x \in [\xi_1(i), \xi_2(i)) \\ -c_i & ; \forall x \in [\xi_2(i), \xi_3(i)) \\ 0 & \text{ElseWhere} \end{cases} \quad \text{for } i \geq 2$$

به طوری که در اینجا داریم:

$$\begin{cases} \xi_1(i) = x(k\mu) \\ \xi_2(i) = x[(k+0.5)\mu] ; c_i = \frac{\xi_2(i) - \xi_1(i)}{\xi_3(i) - \xi_2(i)}, \mu = M/m \\ \xi_3(i) = x[(k+1)\mu] \end{cases}$$

و لذا:

$$\begin{cases} \xi_1(i) = x_{2k\mu} = A + \Delta x \left(\frac{\frac{kM}{q^m} - 1}{q-1} \right), \\ \xi_2(i) = x_{(2k+0.5)\mu} = A + \Delta x \left(\frac{\frac{(k+0.5)M}{q^m} - 1}{q-1} \right), \\ \xi_3(i) = x_{(2k+1)\mu} = A + \Delta x \left(\frac{\frac{(k+1)M}{q^m} - 1}{q-1} \right). \end{cases}$$

در اینجا همانطور که دیده می شود اگر حد q به یک میل کند، آنگاه پایه موجک هار یکنواخت به دست می آید.

به بیان دیگر با قرار دادن $q = 1 \pm \varepsilon$ ، نتایج عددی برای حالت موجک هار یکنواخت حاصل می شود. پس با تغییر مقدار q در حل برخی از معادلات می توان نتایجی با دقت و خطاهای بهتری گرفت.

از جمله خصوصیات شیوه موجک هار، چند رزولوشن و یا چند سطحی بودن این روش است که به ما این امکان را می دهد که با تغییر دادن مقادیر J ، خطای حاصله را بهبود ببخشیم و آن را به کمترین مقدار ممکن برسانیم. زیرا که در روش موجک هار، دیگر خطای ناشی از قطع کردن که در روش تفاضلات متناهی است را نداریم و لذا تعداد جمله های بسط موجک هار بستگی به مقدار J دارد و این خطا حتی برای نقاط گرهی (یا نقاط شبکه ای) نیز بسیار پائین است که این خود نشان دهنده دقت خیلی زیاد روش موجک هار است.

حال در اینجا بازه $[0, 1]$ را به $2M$ زیر بازه که طول هریک از آنها برابر $\frac{1}{2M}$ می باشد، تقسیم کرده و سپس چون از روش هم محلی استفاده می شود، لذا نقاط شبکه ای را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\tau_l = \tau(l) = \frac{l-1}{2M} ; l = 1, 2, \dots, 2M \quad (2-1)$$

به علت این که معادلات دیفرانسیل بحث شده در این پژوهش، به روش هم محلی حل شده اند، لذا این نقاط هم محلی را به صورت زیر نیز تعریف می شوند:

$$t_l = t(l) = \frac{l-0.5}{2M} = x_l = x(l) ; l = 1, 2, \dots, 2M \quad (3-1)$$

چون و هسیانو^۱، ماتریس مربعی $2M$ بعدی H را که ماتریس هار نام دارد، با درایه های زیر معرفی کردند:

$$H(i, l) = h_i(t(l)) = h_i(t_l)$$

در این پژوهش در ابتدا، روش کلی موجک های هار، مورد بحث و بررسی قرار می گیرد. بازده یا کارایی مناسب و عملی بودن آن نیز بر روی چند معادله انتگرالی آبل و ولترای کسری بررسی می شود و سپس نتایج به دست آمده از آن با جوابهای دقیق این مسئله، مقایسه می شوند. در حل معادلات دیفرانسیل سخت یا زُمت نیز کارایی این روش، نشان دهنده اعتبار و کاربرد فن شیوه موجک هار می باشد.

تحلیل همگرایی

قضیه (۲-۱): به فرض آن که $f(t) \in L^2[0,1]$ با مشتقات کراندار $|f'(t)| \leq K$ بوده و $e_M(t) = f(t) - \sum_{i=1}^M f_i h_i(t)$ باشد، آنگاه در این صورت داریم: $\|e_M(t)\| \leq \frac{K}{\sqrt{3M}}$ ؛ یعنی این که سری موجکهای هار همگرا است. برهان: در ابتدا طبق تعریف خطای $e_M(t)$ داریم:

$$\|e_M(t)\|^2 = \int_0^1 (\sum_{i=M+1}^{\infty} f_i h_i(t))^2 dt = \sum_{i=M+1}^{\infty} f_i^2$$

که در اینجا $i = m + k + 1 = 2^j + k + 1; M = 2^j; j > 0$ بوده و همچنین:

$$f_i = \int_0^1 f(t) h_i(t) dt = \sqrt{m} \left(\int_{k/m}^{(k+0.5)/m} f(t) dt - \int_{(k+0.5)/m}^{(k+1)/m} f(t) dt \right)$$

پس بنابراین با توجه به قضیه مقدار میانگین انتگرالها، وجود دارد:

$$\zeta_{j1} \in \left[\frac{k}{m}, \frac{(k+0.5)}{m} \right], \zeta_{j2} \in \left[\frac{(k+1)}{m}, \frac{(k+0.5)}{m} \right]$$

به قسمی که داریم:

$$\begin{aligned} f_i &= \int_0^1 f(t) h_i(t) dt = \sqrt{m} \left(f(\zeta_{j1}) \int_{k/m}^{(k+0.5)/m} dt - f(\zeta_{j2}) \int_{(k+0.5)/m}^{(k+1)/m} dt \right) \\ &= \sqrt{m} \left(f(\zeta_{j1}) \left(\frac{(k+0.5)}{m} - \frac{k}{m} \right) - f(\zeta_{j2}) \left(\frac{(k+1)}{m} - \frac{(k+0.5)}{m} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{m}} (f(\zeta_{j1}) - f(\zeta_{j2})) = \frac{1}{2\sqrt{m}} (\zeta_{j1} - \zeta_{j2}) f'(\zeta_j); \zeta_{j1} \leq \zeta_j \leq \zeta_{j2} \end{aligned}$$

و بالاخره چون که $m = 2^j, M = 2^j$ ، پس از اینرو داریم:

$$\begin{aligned} \|e_M(t)\|^2 &= \sum_{i=M+1}^{\infty} f_i^2 = \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{4m} (\zeta_{j1} - \zeta_{j2})^2 (f'(\zeta_j))^2 \leq \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{4m} \frac{1}{m^2} K^2 = \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{4m^3} K^2 \\ &= \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{4m^3} K^2 = \frac{K^2}{4} \sum_{j=J}^{\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{m^3} = \frac{K^2}{4} \sum_{j=J}^{\infty} \frac{1}{m^3} \left(\sum_{k=0}^{m-1} 1 \right) = \frac{K^2}{4} \sum_{j=J}^{\infty} \frac{1}{m^3} (m) = \frac{K^2}{4} \sum_{j=J}^{\infty} \frac{1}{m^2} \\ &= \frac{K^2}{4} \sum_{j=J}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} = \frac{K^2}{4} \left(\frac{4}{3M^2} \right) = \frac{K^2}{3} \frac{1}{M^2} = \frac{K^2}{3M^2} \end{aligned}$$

به عبارت دیگر: $\|e_M(t)\| \leq \frac{K}{\sqrt{3M}}$ و این اثبات را کامل می کند.

قضیه (۳-۱): به فرض این که $y(t) \in C^{M+1}[0, t_f]$ بوده و $\tilde{y}(t) = C^T \tilde{H}(t)$ نیز بهترین تقریب باشد، آنگاه داریم:

$$\|y(t) - C^T \tilde{H}(t)\|_{\infty} \leq \frac{NP^{M+1}}{(M+1)!}; N = \max_{0 \leq t < t_f} |f^{M+1}(t)|, P = \max\{t_0, |t - t_0|\}$$

برهان: در ابتدا با توجه به چندجمله ای تیلور، داریم:

$$y(t) = y(t_0) + y'(t_0)(t - t_0) + y''(t_0) \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + y^{(M)}(t_0) \frac{(t-t_0)^M}{M!}$$

به طوری که:

$$|y(t) - \tilde{y}(t)| = \left| y^{(M+1)}(\xi) \frac{(t-t_0)^{M+1}}{(M+1)!} \right| \exists \xi \in [0, t_f]$$

و از اینرو به صورت زیر حکم ثابت می شود:

$$\|y(t) - C^T \tilde{H}(t)\|_{\infty} \leq \|y(t) - \tilde{y}(t)\|_{\infty} \leq \max_{0 \leq t < t_f} |f^{M+1}(t)| \frac{|t-t_0|^{M+1}}{(M+1)!} \leq \frac{NP^{M+1}}{(M+1)!}$$

و این اثبات قضیه را کامل می کند.

۲- روش حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری با کمک شیوه عملیاتی موجک هار

در این بخش، یک الگوریتم ساده و مؤثر بر اساس روش موجک هار برای جواب معادلات پانتوگراف غیر خطی کسری ارائه شده است.

(۱-۲): روش ایجاد ماتریس کششی HSM و خواص آن:

در ابتدا با ارائه یک ماتریس HSM ، که آن را با S_h نشان می‌دهیم، رفتار توابع با آرگومانهای کششی را بررسی می‌کنیم. پس برای این منظور، رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y\left(\frac{t}{\delta}\right) \approx \tilde{c}_M^T \tilde{h}_M\left(\frac{t}{\delta}\right) \quad (1.2)$$

و:

$$\tilde{h}_M\left(\frac{t}{\delta}\right) \approx S_h \tilde{h}_M(t) \quad (2.2)$$

و لذا داریم:

$$y\left(\frac{t}{\delta}\right) \approx \tilde{c}_M^T S_h \tilde{h}_M(t) \quad (3.2)$$

که در اینجا S_h ماتریس کششی است که آن را بعداً معرفی خواهیم کرد.

ما به راحتی می‌توانیم ماتریس HSM مورد نیاز برای هر δ داده شده را از راه تناظر یک به یک موجک هار با توابع بلاک - پالس ایجاد کنیم. پس برای این منظور، دو حالت زیر را در نظر بگیریم:

(الف): وقتی که $\delta > 1$ باشد، آنگاه به فرض آن که قرار دهیم: $\eta = \frac{1}{\delta-1}$ ، آنگاه در اینصورت زیرماتریس کششی زیر را خواهیم داشت:

$$S = \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} \eta & & & & \\ & \eta-1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & \eta \end{bmatrix}_{\eta \times (\eta+1)}$$

حال فرض کنید که S یک ماتریس $\eta \times (\eta+1)$ باشد که با $S = [s_{ij}]_{\eta \times (\eta+1)}$ نمایش داده شود.

در ابعاد بزرگتر هم به فرض آنکه $M > \kappa(\eta+1)$ که $\kappa = \lfloor \frac{M}{\eta+1} \rfloor$ ، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $\frac{M}{\eta+1}$ باشد، آنگاه ما در اینصورت به کمک S و \tilde{S} ، ماتریس کششی بلاک - پالس را به شکل زیر به دست می‌آوریم:

$$S_a = \begin{bmatrix} S & & \\ & \ddots & \\ & & S \\ & & & \tilde{S} \end{bmatrix}$$

به قسمی که:

$$S_a = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta} \left(\eta - i + 1 + \eta \left[\frac{i-1}{\eta} \right] ; j = i + \left[\frac{i-1}{\eta} \right] \right) \\ i - \eta \left[\frac{i-1}{\eta} \right] ; j = i + 1 + \left[\frac{i-1}{\eta} \right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta} \left(\eta - i + 1 + \eta \left[\frac{i}{\eta+1} \right] ; j = i + \left[\frac{i}{\eta+1} \right] \right) \\ i - \eta \left[\frac{i}{\eta+1} \right] ; j = i + 1 + \left[\frac{i}{\eta+1} \right] \end{bmatrix}$$

که در اینجا داریم:

$$\tilde{S} = \begin{bmatrix} \hat{S} \\ \hat{0} \end{bmatrix} ; \hat{S} = [s_{ij}]_{(M-\kappa(\eta+1)) \times (M-\kappa(\eta+1))}, \hat{0} = 0_{\kappa \times (M-\kappa(\eta+1))}$$

پس از اینرو با توجه به صفر بودن بُعد زیر ماتریس $\hat{0}$ ، ماتریس S_h به صورت زیر به دست می‌آید:

$$S_h = HS_a H^{-1} \quad (4.2)$$

(ب): وقتی که $0 < \delta < 1$ باشد، آنگاه بفرض آن که قرار دهیم: $\eta = \frac{1}{1-\delta}$ ، آنگاه در اینصورت زیرماتریس کششی بلاک - پالس S ، به صورت زیر است:

$$S = \frac{1}{\eta} \begin{bmatrix} \eta - 1 & & & & & \\ & \eta - 2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \eta - 2 & \\ & & & & & \eta - 1 \end{bmatrix}_{\eta \times (\eta-1)}$$

حال فرض کنید که S یک ماتریس $\eta \times (\eta - 1)$ باشد که با $S = [s_{ij}]_{\eta \times (\eta-1)}$ نمایش داده شود.

در ابعاد بزرگتر هم به فرض آنکه $M > \kappa\eta$ که $\kappa = \lfloor \frac{M}{\eta} \rfloor$ ، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از $\frac{M}{\eta}$ باشد، آنگاه ما در اینصورت باز همچنان به کمک S و \tilde{S} ، ماتریس کششی بلاک - پالس را به شکل زیر به دست می آوریم:

$$\tilde{S} = [\hat{S} \quad \hat{0}]; \hat{S} = [s_{ij}]_{(M-\kappa\eta) \times (M-\kappa\eta)}, \hat{0} = 0_{(M-\kappa\eta) \times \kappa}$$

به طوری که:

$$S_b = [s_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta} \left(\eta - i + \eta \left\lfloor \frac{j}{\eta} \right\rfloor \right); & i = j + \left\lfloor \frac{j}{\eta} \right\rfloor \\ \frac{1}{\eta} \left(i - 1 - \eta \left\lfloor \frac{j}{\eta} \right\rfloor \right); & i = j + 1 + \left\lfloor \frac{j}{\eta} \right\rfloor \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta} \left(\eta - i + \eta \left\lfloor \frac{j \pm 1}{\eta \pm 1} \right\rfloor \right); & i = j + \left\lfloor \frac{j \pm 1}{\eta \pm 1} \right\rfloor \\ \frac{1}{\eta} \left(i - 1 - \eta \left\lfloor \frac{j \pm 1}{\eta \pm 1} \right\rfloor \right); & i = j + 1 + \left\lfloor \frac{j \pm 1}{\eta \pm 1} \right\rfloor \end{bmatrix}$$

پس بنابراین با توجه به صفر بودن بُعد زیر ماتریس $\hat{0}$ ، مانند حالت قبل، ماتریس S_h به صورت زیر به دست می آید:

$$S_h = HS_a H^{-1} \quad (5.2)$$

هدف اصلی این پژوهش، معرفی یک روش عملیاتی موجک برای تقریب جواب معادلات پانتوگراف غیر خطی کسری به شکل زیر است:

$$f^\alpha(t) = A(t)f(t) + \hat{A}(t)f\left(\frac{t}{\lambda}\right) + B(t).u(t); f(0) = f_0, 0 < \alpha < 1 \quad (6-2)$$

که در اینجا $f(t), f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \in \mathbb{R}^n$ بوده و $u(t) \in \mathbb{R}^r$ نیز متغیر کنترل است. همچنین داریم:

$$A(t), \hat{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$$

و لذا پاسخ $f(t)$ را به ازای هر $0 \leq t < t_f$ ، مد نظر داریم.

حال چون موجک هر بازه $[0,1)$ تعریف می شود، پس با کمک تغییر متغیر $t = t_f \cdot \tau$ ، می توانیم بنویسیم:

$$f^\alpha(t) \triangleq \frac{df(\tau)}{d\tau} = t_f \left[A(\tau)f(\tau) + \hat{A}(\tau)f\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) + B(\tau).u(\tau) \right]; f(0) = f_0 \quad (7-2)$$

که در اینجا $\tau \in [0,1)$ می باشد. پس اگر قرار دهیم: $f^{(\alpha)}(\tau) = C_M^T \tilde{H}(\tau)$ ، آنگاه در این صورت می توانیم بنویسیم:

$$f(\tau) = C_M^T P^{(\alpha)} \tilde{H}(\tau) + f(0)E = C_M^T P^{(\alpha)} \tilde{H}(\tau) + f_0 E \quad (8-2)$$

و لذا با جایگذاری رابطه $(8-2)$ در رابطه $(7-2)$ و سپس با حذف $\tilde{H}(\tau)$ از همه جملات معادله حاصل، داریم:

$$C_M^T \tilde{H}(\tau) = t_f \left[A(\tau) \left(C_M^T P^{(\alpha)} \tilde{H}(\tau) + f_0 E \right) + \hat{A}(\tau) \left(C_M^T P^{(\alpha)} S_h \tilde{H}(\tau) + f_0 E \right) + B(\tau).u(\tau) \right]; f(0) = f_0$$

از معادله فوق، ضرایب موجک C_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب هر به ازای مقادیر مختلف α به دست می آید.

موجک هر دارای یک نقطه ضعف اساسی است و آن این است موجک هر پیوسته نیست و لذا به همین دلیل عدم پیوستگی، و در نتیجه آن، عدم وجود مشتقات در نقاط ناپیوستگی، به کار بردن موجک هر بطور مستقیم برای حل معادلات دیفرانسیل ممکن و مقدر نیست.

به طور کلی اگر بالاترین مرتبه مشتقات ظاهر شده در معادله را با $y^n(t)$ نشان دهیم، آنگاه به دلیل همین عدم پیوستگی موجک هر پس می توان بسط موجک هر این معادله را از بالاترین مرتبه معادله، به صورت زیر نشان داد:

$$\begin{cases} f^{(n)}(t) = C_i H \\ f^{(n-1)}(t) = C_i P H + f_0^{(n-1)} E_M \\ f^{(n-2)}(t) = C_i P^{(2)} H + f_0^{(n-1)} T + f_0^{(n-2)} E_M \\ \vdots \\ f(t) = C_i P^{(n)} H + f_0^{(n-1)} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!} + f_0^{(n-2)} \frac{T^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + f_0' \frac{T}{1!} + f_0 E_M \end{cases}$$

که در اینجا $T = \{t_i\}_{i=1}^M$ ، بردار نقاط هم محلی و E_M نیز بردار واحد هم بُعد با آن است.

و لذا برای متغیر کششی $\frac{t}{\lambda}$ در جهت حل معادلات پانتوگراف غیرخطی تا هر مرتبه نیز به همین صورت داریم:

$$\begin{cases} f^{(n)}\left(\frac{t}{\lambda}\right) = C_i S_h H \\ f^{(n-1)}\left(\frac{t}{\lambda}\right) = C_i P S_h H + f_0^{(n-1)} E_M \\ f^{(n-2)}\left(\frac{t}{\lambda}\right) = C_i P^{(2)} S_h H + f_0^{(n-1)} \frac{T}{\lambda} + f_0^{(n-2)} E_M \\ \vdots \\ f\left(\frac{t}{\lambda}\right) = C_i P^{(n)} S_h H + \frac{f_0^{(n-1)}}{(n-1)!} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n-1} + \frac{f_0^{(n-2)}}{(n-2)!} \left(\frac{T}{\lambda}\right)^{n-2} + \dots + \frac{f_0' T}{1! \lambda} + f_0 E_M \end{cases}$$

ضمناً در اینجا توجه کنید که دقت و کارایی روش ما به کمک تابع های خطای زیر بر بازه $[A, B] = [0, 1]$ ، برآورد و یا تخمین زده می شود:

$$\delta_i = \max_{1 \leq j \leq M} |f e_i(t_j) - f_i(t_j)|, \sigma_i = \frac{\|\delta_i\|_2}{M} = \frac{\|f e_i(t_j) - f_i(t_j)\|_2}{M}$$

به طوری که در اینجا داریم:

$$t_j = A + (B - A) \frac{j-1/2}{M} = A + L \frac{j-0.5}{M} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

۳- محاسبات کسری

در اینجا عملگرهای کسری و خواص آنها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:
تعریف (۳-۱): مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α برای تابع $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(k-\alpha)} \int_a^x \frac{y^{(k)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-k+1}} d\tau$$

به طوری که در اینجا $\Gamma(0)$ ، تابع گاما بوده و داریم:

$$k-1 < \alpha \leq k, k \in \mathbb{N}$$

همچنین در اینجا رابطه بین عملگر مشتق کسری کاپوتو و عملگر انتگرالی کسری ریمان - لیوویل، با عبارات زیر بیان می‌شود:

$$(I): D^\alpha I^\alpha y(x) = y(x), (II): I^\alpha D^\alpha y(x) = y(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{y^{(k)}(0)}{k!} x^k = y(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!} y^{(k)}(0).$$

(۱-۳) توابع بلاک - پالس و ماتریس عملگر انتگرال گیری کسری

در این بخش، ماتریس های بلاک - پالس (یا BPF's)، در بازه $[0,1]$ و خواص آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$b_i(x) = \begin{cases} 1; & \frac{i-1}{M} \leq x \leq \frac{i}{M} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حال به ازای هر $i = 1, 2, \dots, M$ ، بردار توابع بلاک - پالس به صورت زیر به دست می‌آید:

$$B_M(x) = [b_1(x), b_2(x), \dots, b_M(x)]^T$$

و اینک خواص بسیار مهم زیر را در نظر می‌گیریم:

$$b_i(x)b_j(x) = \begin{cases} b_i(x); & i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}, \int_0^1 b_i(x)b_j(x) dx = \begin{cases} \frac{1}{M}; & i = j \\ 0; & i \neq j \end{cases}$$

لم (۳-۱): با فرض داشتن ماتریس $B_M(x)$ در بالا، ماتریس عملگر انتگرالی از مرتبه کسری F^α ، نمایشی به صورت زیر را دارد:

$$I^\alpha(B_M(x)) \approx F^\alpha B_M(x); F^\alpha = \frac{1}{M^\alpha} \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_{M-1} \\ 0 & 1 & z_1 & z_2 & \dots & z_{M-2} \\ 0 & 0 & 1 & z_1 & \dots & z_{M-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & z_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه داشته باشیم:

$$z_k = (k+1)^{\alpha+1} - 2k^{\alpha+1} + (k-1)^{\alpha+1}; k = 1, 2, \dots, M$$

و همچنین یک تابع $f \in L^2([0,1])$ که می‌توان آن را بر حسب عبارات متناهی از توابع بلاک - پالس به شکل زیر تقریب زد:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^M f_i b_M(x) = F^T B_M(x)$$

حال اگر $F = (f_{ij})$ و $G = (g_{ij})$ ، دو ماتریس $M \times M$ باشند، آنگاه در اینصورت عبارت $F \otimes G$ بصورت $(F_{ij} \times G_{ij})_{M \times M}$ تعریف میشود.

تعریف (۳-۲): اگر فرض کنید که $f(x), g(x) \in L^2([0,1])$ را بتوان به صورت $f(x) = F^T B_M(x)$ و $g(x) = G^T B_M(x)$ در نظر گرفت.

آنگاه در اینصورت عبارت $f(x), g(x) \in L_2([0,1])$ را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$f(x)g(x) = F^T B_M(x) B_M^T(x) G = \mathcal{H} B_M(x)$$

به طوری که در اینجا داریم: $\mathcal{H} = F^T \otimes G^T$; مثلاً به ازای $J = 3$ ، خواهیم داشت:

$$F^{0.5} = \begin{bmatrix} 0.2660 & 0.2203 & 0.1434 & 0.1160 & 0.1001 & 0.0894 & 0.0816 & 0.0755 \\ 0.0000 & 0.2660 & 0.2203 & 0.1434 & 0.1160 & 0.1001 & 0.0894 & 0.0816 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.2660 & 0.2203 & 0.1434 & 0.1160 & 0.1001 & 0.0894 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2660 & 0.2203 & 0.1434 & 0.1160 & 0.1001 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2660 & 0.2203 & 0.1434 & 0.1160 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2660 & 0.2203 & 0.1434 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2660 & 0.2203 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.2660 \end{bmatrix}$$

۴- تحلیل و بررسی برای یافتن جوابهای معادلات دیفرانسیل پانتوگراف کسری

در این بخش دقت و کارایی تکنیک روش موجک هار برای حل معادلات پانتوگراف کسری را با ارائه چند مثال ساده نشان می‌دهیم.
مثال (۴-۱): معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیر خطی از مرتبه کسری (برگرفته از بخش مرجع [16]) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f^{(\alpha)}(t) + f(t) - sf\left(\frac{t}{\lambda}\right) = r(t); f(0) = 1; t \in [0, t_f] = [0, 1], 0 < \alpha \leq 1 \quad (1-4)$$

به طوری که:

$$\lambda = 5, r(t) = -se^{-\frac{t}{\lambda}}, s = \frac{1}{10}$$

جواب دقیق و یا واقعی این مسأله برای $\alpha = 1$ ، به صورت زیر است:

$$f_{ex}(t) = e^{-t}$$

و اینک برای پیدا کردن تقریب جواب برای معادله (1-4)، در ابتدا فرض می‌کنیم که $f^{(\alpha)}(\tau) = C_M^T \tilde{H}(\tau)$ و لذا داریم:

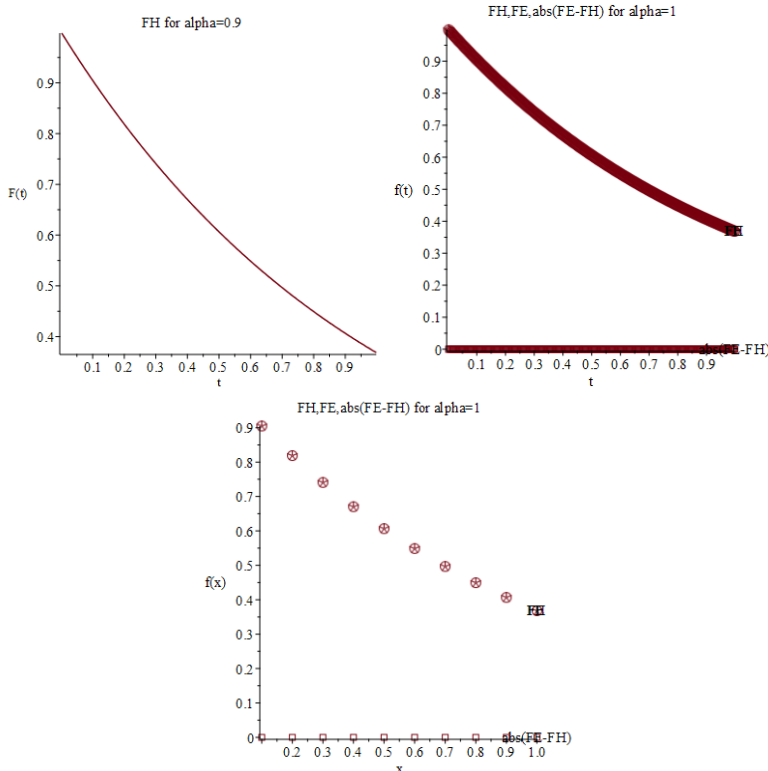
$$C_M^T \tilde{H}(t) + t_f \left((C_M^T P^{(\alpha)} \tilde{H}(\tau) + f_0 E) - s(C_M^T P^{(\alpha)} S_h \tilde{H}(\tau) + f_0 E) - R_M^T \right); R_M^T = \{r(t_i)\}_{i=1}^M, t_i = t_f \cdot \tau_i, \tau_i = \frac{i-0.5}{M}$$

از معادله فوق، ضرایب موجک C_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب هار به ازای هر مقدار α به دست می‌آید.

مقایسه بین جواب روش موجک هار و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ ، در جدول (1-4) و نیز در شکل (1-4) آورده شده است. نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد میکند که شیوه موجک هار تقریباً در تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

J	4	5	6	7	8
$M = 2^J$	16	32	64	128	256
δ	0.002	0.001042	0.0005751	0.000291	0.0001442
σ	0.00011875	0.00003125	9.063e-06	2.266e-06	5.47e-07

جدول (1-4): مقایسه نتایج عددی بین جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و برای معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری (1-4).



شکل (1-4): نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و نیز نمایش خطا در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$

برای معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری (4-1) به ازای $J = 8$ ، به کمک نرم افزار ریاضی میپل به ازای $\alpha = 1$.

مثال (2-4): معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیر خطی از مرتبه کسری (برگرفته از بخش مرجع [16]) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f^{(\alpha)}(t) + f(t) + sf\left(\frac{t}{\lambda}\right) = r(t); f(0) = 1; t \in [0, t_f] = [0, 1], 0 < \alpha \leq 1 \quad (2-4)$$

به طوری که:

$$\lambda = \frac{10}{8}, r(t) = 0, s = 1$$

جواب دقیق و یا واقعی این مسأله برای $\alpha = 1$ ، به صورت زیر است:

$$f_{ex}(t) = \text{Range - Kutta}$$

و اینک برای پیدا کردن تقریب جواب برای معادله (2-4)، در ابتدا فرض می کنیم که $f^{(\alpha)}(\tau) = C_M^T \tilde{H}(\tau)$ و لذا داریم:

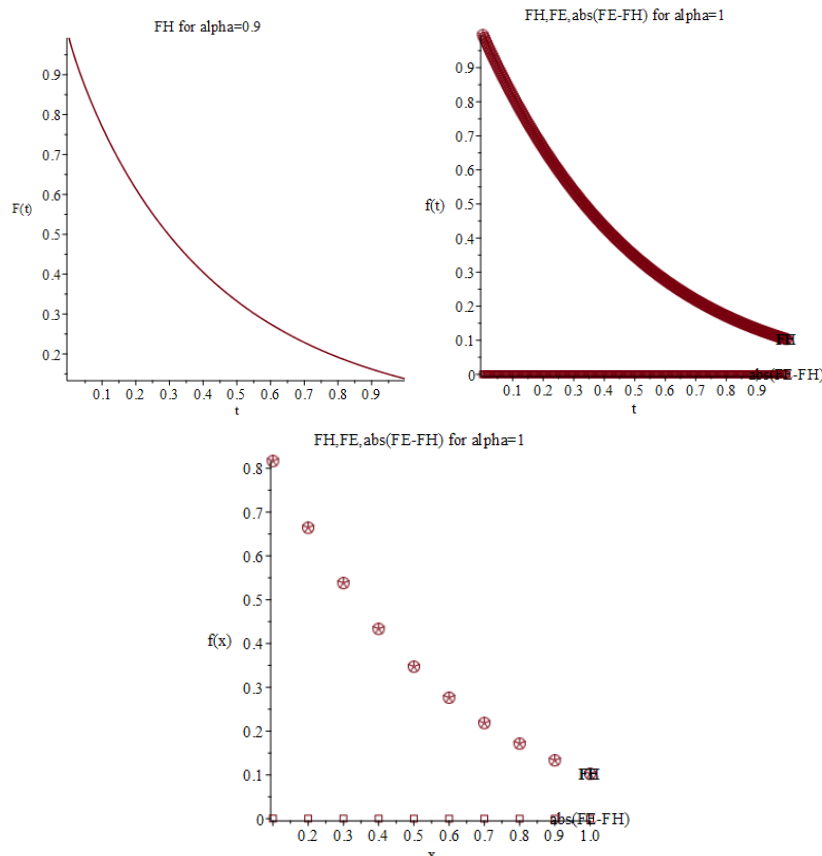
$$C_M^T \tilde{H}(t) + t_f \left((C_M^T P^{(\alpha)} \tilde{H}(x) + f_0 E) + s(C_M^T P^{(\alpha)} S_h \tilde{H}(x) + f_0 E) - R_M^T \right); R_M^T = \{r(t_f, \tau_i)\}_{i=1}^M, \tau_i = \frac{i-0.5}{M}$$

از معادله فوق، ضرایب موجک C_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب هار به ازای هر مقدار α به دست می آید.

مقایسه بین جواب روش موجک هار و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ ، در جدول (2-4) و نیز در شکل (2-4) آورده شده است. نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد می کند که شیوه موجک هار تقریباً در تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

J	4	5	6	7	8
$M = 2^J$	16	32	64	128	256
δ	0.002621	0.001183	0.0007573	0.00063	0.00062
σ	0.0001625	0.0000375	0.000012	4.922e-06	2.422e-06

جدول (2-4): مقایسه نتایج عددی بین جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و برای معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری (2-4).



شکل (2-4): نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و نیز نمایش خطا در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$

برای معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری (4-2) به ازای $J = 8$ ، به کمک نرم افزار ریاضی میپل به ازای $\alpha = 1$.

مثال (3-4): معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیر خطی از مرتبه کسری (برگرفته از بخش مرجع [16]) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f^{(\alpha)}(t) + sf^2\left(\frac{t}{\lambda}\right) = r(t); f(0) = 0; t \in [0, t_f] = [0, 1], 0 < \alpha \leq 1 \quad (3-4)$$

به طوری که:

$$\lambda = s = 2, r(t) = 1$$

جواب دقیق و یا واقعی این مسأله برای $\alpha = 1$ ، به صورت زیر است:

$$f_{ex}(t) = \sin(t)$$

و اینک برای پیدا کردن تقریب جواب برای معادله (4-3)، در ابتدا فرض می کنیم که $f^{(\alpha)}(\tau) = C_M^T \tilde{H}(\tau)$ و لذا داریم:

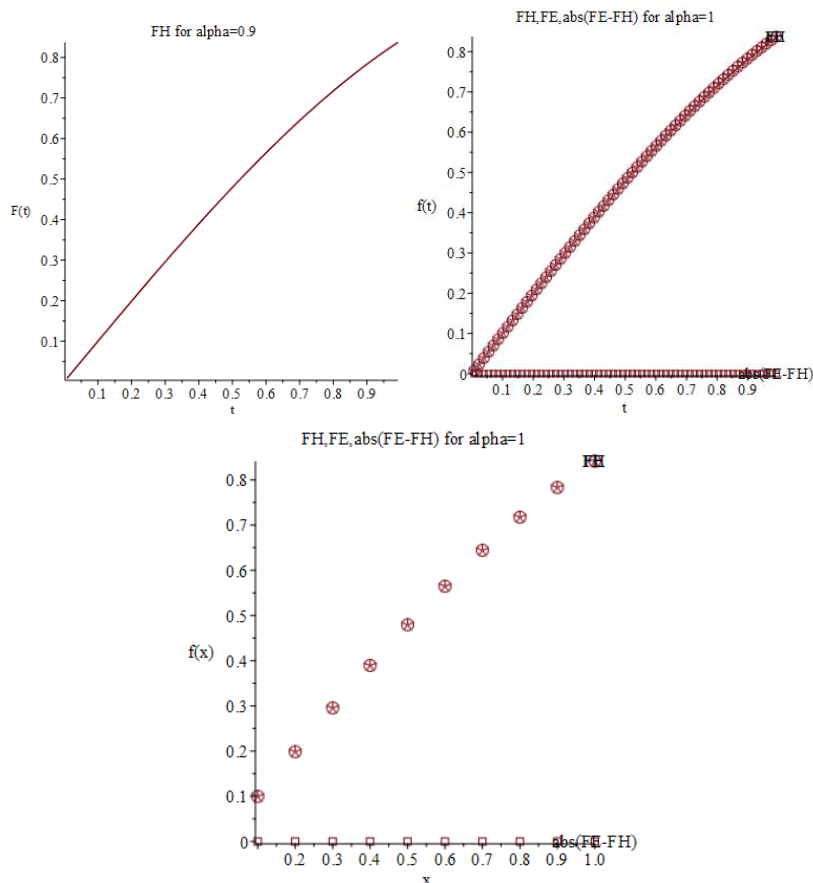
$$C_M^T \tilde{H}(t) + st_f (C_M^T P^{(\alpha)} S_h \tilde{H}(x) + f_0 E)^2 = R_M^T; R_M^T = \{r(t_f \cdot \tau_i)\}_{i=1}^M, \tau_i = \frac{i-0.5}{M}$$

از معادله فوق، ضرایب موجک C_M^T به راحتی محاسبه شده و سپس بردار جواب هار به ازای هر مقدار α به دست می آید.

مقایسه بین جواب روش موجک هار و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ ، در جدول (4-3) و نیز در شکل (4-3) آورده شده است. نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد می کند که شیوه موجک هار تقریباً در تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

J	2	3	4	5	6
$M = 2^J$	4	8	16	32	64
δ	0.007933	0.001958326	0.000474	0.00012	0.000028841
σ	0.001975	0.00025	0.000029375	$3.75e - 06$	$4.53e - 07$

جدول (4-3): مقایسه نتایج عددی بین جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و برای معادله دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری (4-3).



شکل (4-3): نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و نیز نمایش خطا در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$ برای معادلهٔ دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری (4-3) به ازای $J = 6$ ، به کمک نرم افزار ریاضی میپل به ازای $\alpha = 1$.

مثال (4-4): دستگاه معادلات دیفرانسیل پانتوگراف غیر خطی از مرتبهٔ کسری (برگرفته از بخش مرجع [20]) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\dot{f}(t) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & -t \end{bmatrix} f(t) + \begin{bmatrix} -t & -2 \\ -1 & -2t \end{bmatrix} f\left(\frac{t}{\lambda}\right) + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t); x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; t \in [0, t_f] = [0, 1], 0 < \alpha \leq 1 \quad (4-4)$$

و یا:

$$\begin{bmatrix} \dot{f}_1(t) \\ \dot{f}_2(t) \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \alpha(t) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \beta(t) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} f_1(t/\lambda) \\ f_2(t/\lambda) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t); f(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

و لذا با توجه به $p = q = 2, r = 1, n = 2$ داریم:

$$\dot{f}(t) = (A_1 + \alpha(t)A_2)f(t) + (\hat{A}_1 + \beta(t)\hat{A}_2)f\left(\frac{t}{\lambda}\right) + B.u(t); f(0) = f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

به طوری که:

$$\lambda = 1.2, r(t) = B.u(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t}, A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \alpha(t) = \beta(t) = t$$

و اینک برای پیدا کردن تقریب جواب برای معادله (4-4)، در ابتدا فرض می کنیم که $f^{(\alpha)}(\tau) = C_M^T \tilde{H}(\tau)$ و لذا می توانیم بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} C_1^T \tilde{H}(\tau) \\ C_2^T \tilde{H}(\tau) \end{bmatrix} - t_f \left\{ (A_1 + \alpha(\tau)A_2) \begin{bmatrix} C_1^T P^{(\alpha)} \tilde{H}(\tau) + f_{01} E \\ C_2^T P^{(\alpha)} \tilde{H}(\tau) + f_{02} E \end{bmatrix} + (\hat{A}_1 + \beta(\tau)\hat{A}_2) \begin{bmatrix} C_1^T P^{(\alpha)} S_h \tilde{H}(\tau) + f_{01} E \\ C_2^T P^{(\alpha)} S_h \tilde{H}(\tau) + f_{02} E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} \right\}$$

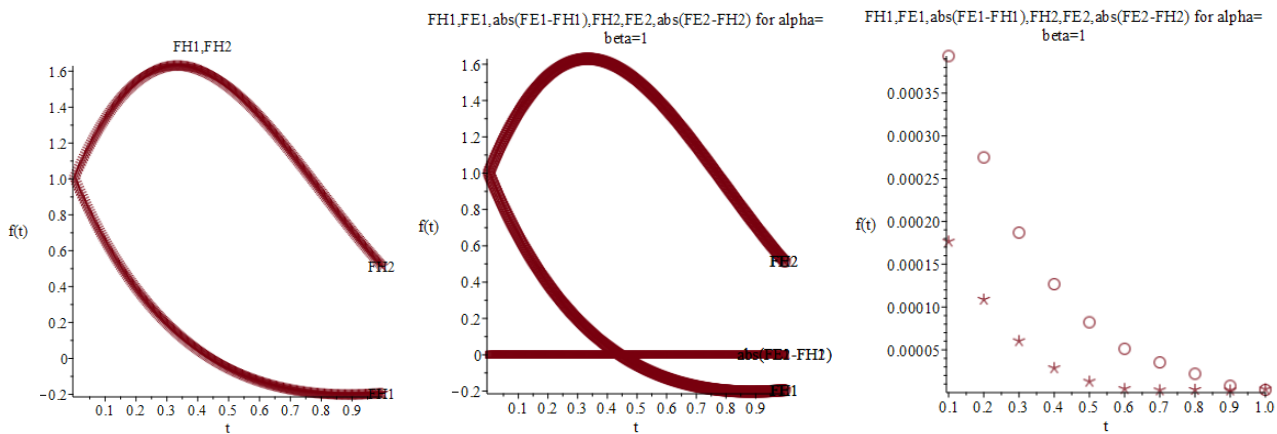
به طوری که در اینجا داریم:

$$\begin{cases} U_1^T = \{u_1(\tau_i)\}_{i=1}^M \\ U_2^T = \{u_2(\tau_i)\}_{i=1}^M \end{cases}, t_i = t_f \tau_i, \tau_i = \frac{i-0.5}{M}$$

از معادلهٔ فوق، ضرایب موجک C_i^T به ازای هر $i = 1, 2$ ، به راحتی محاسبه شده و سپس بردارهای نظیر جوابهای هار به دست می آید. مقایسهٔ بین جواب های روش موجک هار و جواب تحلیلی این مسأله به ازای هر $t \in [0, t_f] = [0, 1]$ ، در جدول (4-4) و نیز در شکل (4-4) آورده شده است. نتایج عددی این مقایسه ما را متقاعد می کند که شیوهٔ موجک هار تقریباً در تطابق کامل با جواب دقیق و یا رانگ - کوتای این مسئله است.

J	4	5	6	7	8
$M = 2^J$	16	32	64	128	256
δ_1	0.0032	0.00038	0.000503	0.0006	0.000606064
σ_1	0.0003223	0.000038	0.00001882	0.00001724	0.00001303
δ_2	0.0055022	0.001173	0.0002742	0.00023	0.0002812
σ_2	0.000691	0.00011	0.00001320	$5.642e - 06$	$5.496e - 06$

جدول (4-4): مقایسهٔ نتایج عددی بین جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و برای دستگاه معادلات دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری (4-4).



شکل (4-4) : نمودارهای مربوط به تابع خطا و نیز جواب موجک هار و جواب دقیق یا واقعی و نیز نمایش خطا در نقاط $t_i = \frac{i}{10}; i = 1, 2, \dots, 10$ برای دستگاه معادلات دیفرانسیل پانتوگراف غیرخطی کسری (4-4) به ازای $J = 8$ ، به کمک نرم افزار ریاضی میپل.

۵- استنباط و نتیجه گیری

در اینجا یک شیوه جدید برای حل عددی معادلات دیفرانسیل پانتوگراف غیر خطی کسری نوع دوم بر اساس روش عملیاتی موجک هار برای تحلیل و بررسی چند تا از اینگونه معادلات ارائه شد و نیز قابلیت، توانایی و تأثیر پذیری آن بر روی این قبیل از معادلات مورد تست و آزمون قرار گرفت. فواید اصلی روش موجکهای هار، نمایش تنک، تبدیل سریع و امکان پیاده سازی الگوریتمهای سریع (به ویژه اگر ماتریس نمایش مورد استفاده قرار گرفته شده باشد)، است. به این دلیل، دقت جواب های به دست آمده، کاملاً بالا و رضایت بخش است، حتی اگر تعداد نقطه های هم محلی کم باشد. با اینحال، با افزایش دادن تعداد نقاط هم محلی، خطای جواب به سرعت کاهش می یابد. در اینجا نیز با کاربرد شیوه موجک هار در حل معادلات دیفرانسیل پانتوگراف غیر خطی کسری، دقت و کارایی این روش در حل اینگونه از معادلات، به نمایش گذاشته شد.

تقدیر و تشکر:

از همفکری و همیاری و همچنین راهنمایی های جناب دکتر کاظم نوری و همچنین دکتر لیلیا ترک زاده که در ارائه این پژوهش با من همکاری و هم فکری داشتند تشکر می کنم.

References:

- [1]. Ü. Lepik, Numerical solutions of differential equations using Haar wavelets, Math. Comput. Simul., 68 (2005) 127–143.
- [2]. C.F. Chen, C.H. Hsiao, Haar wavelet method for solving lumped- and distributed-parameter systems, IEE Proc. Pt. D 144 (1) (1997) 87–94.
- [3]. C.F. Chen, C.H. Hsiao, Wavelet approach to optimizing dynamic systems, IEE Proc. Control Theory Appl. Pt. D 146 (1999) 213–219.
- [4]. C.H. Hsiao, W.J. Wang, State analysis and optimal control of linear time-varying systems via Haar wavelets, Optimal Control Appl. Methods, 19 (1998) 423–433.
- [5]. R. C. Mittal, Sapna Pandit, New Scale-3 Haar Wavelets Algorithm for Numerical Simulation of Second Order Ordinary Differential Equations, Article of November 2019.
- [6]. C.H. Hsiao, W.J. Wang, Haar wavelet approach to nonlinear stiff systems, Math. Comput. Simul., 57 (2001) 347-353.
- [7]. Thabet Abdeljawad, Rohul Amin, Kamal Shah, Qasem Al-Mdallal and Fahd Jarad, Efficient sustainable algorithm for numerical solutions of systems of fractional order differential equations by Haar wavelet collocation method, Alexandria Engineering Journal (2020) 59, 2391–2400.
- [8]. Esmail Bargamadi, Leila Torkzadeh, Kazem Nouri and Amin Jajarmi, Solving a System of Fractional-Order Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels via the Second Chebyshev Wavelets Method, Fractal Fract. 2021, 5, 70.
- [9]. Sahar Altaf and Sumaira Yousuf Khan, Numerical Solution of Fractional Electrical Circuits by Haar Wavelet, MATEMATIKA: MJIAM, 2019, Volume 35, Number 3, 331–343.

- [10]. Habibollah Saeedi, Nasibeh Mollahasani, Mahmoud Mohseni Moghadam and Gennady N. Chuev, An operational haar wavelet method for solving fractional volterra integral equations, *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2011, Vol. 21, No. 3, 535–547.
- [11]. Hassan A. Zedan and Eman Alaidarous, Haar Wavelet Method for the System of Integral Equations, Received 15 March 2014; Revised 13 May 2014; Accepted 20 May 2014; Published 21 July 2014, Academic Editor: Imran Naeem.
- [12]. Jafar Biazar and H. Ebrahimi, A new technique for systems of Abel-Volterra integral equations, *International Journal of the Physical Sciences* Vol. 7(1), pp. 89 - 99, 2 January, 2012.
- [13]. Sunil Kumar, Om P. Singh and Sandeep Dixit, Homotopy Perturbation Method for Solving System of Homotopy Perturbation Method for Solving System of Generalized Abel's Integral Equations, *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*, 6-2011.
- [14]. Rajesh K. Pandey, Om P. Singh and Vineet K. Singh, Efficient algorithms to solve singular integral equations of Abel type, *Computers and Mathematics with Applications* 57 (2009) 664-676.
- [15]. Vineet K. Singh, Rajesh K. Pandey and Om P. Singh, New Stable Numerical Solutions of Singular Integral Equations of Abel Type by Using Normalized Bernstein Polynomials, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 3, 2009, no. 5, 241 – 255.
- [16]. M. Mustafa Bahsi and Mehmet Çevik, Numerical Solution of Pantograph-Type Delay Differential Equations Using Perturbation-Iteration Algorithms, *Hindawi Publishing Corporation Journal of Applied Mathematics* Volume 2015, Article ID 139821, 10 pages.
- [17]. Brahim Benhammouda, Hector Vazquez-Leal and Luis Hernandez-Martinez, Procedure for Exact Solutions of Nonlinear Pantograph Delay Differential Equations, *British Journal of Mathematics & Computer Science* 4(19): XX-XX, 2014.
- [18]. H. Jafari, M. Mahmoudi and M.H. Noori Skandari, A new numerical method to solve pantograph delay differential equations with convergence analysis, *Jafari et al. Advances in Difference Equations* 2021:129.
- [19]. M. R. Fatehi, M. Samavat, M. A. Vali, and F. Khaleghi, State Analysis and Optimal Control of Linear Time-Invariant Scaled Systems Using the Chebyshev Wavelets, *Contemporary Engineering Sciences*, Vol. 5, 2012, no. 2, 91 – 105.
- [20]. C.H. Hsiao, S.P. Wu, Numerical solution of time-varying functional differential equations via Haar wavelets, *Applied Mathematics and Computation* 188 (2007) 1049–1058.
- [21]. Aliaa Burqan, Rania Saadeh and Ahmad Qazza, A Novel Numerical Approach in Solving Fractional Neutral Pantograph Equations via the ARA Integral Transform, *Symmetry* 2022, 14, 50.
- [22]. Musa Cakir, Derya Arsian, The Adomian Decomposition Method and the differential transform method for numerical solution of Multi-Pantograph Delay differential equations, Department of mathematics. Faculty of science, University of Yuzuncu Yil, Van, Turkey.
- [23]. J. P. JAISWAL, KAILASH YADAV, A COMPARATIVE STUDY OF NUMERICAL SOLUTION OF PANTOGRAPH EQUATIONS USING VARIOUS WAVELETS, *TWMS J. App. and Eng. Math.* V.11, N.3, 2021, pp. 772-788.
- [24]. E. SOKHANVAR AND A. ASKARI-HEMMAT, A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING DELAY-FRACTIONAL DIFFERENTIAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS, Received: 29 May 2016, Accepted: 10 May 2017.
1. abdalrezamomeni@yahoo.com
 2. knouri@semnan.ac.ir
 3. torkzadeh@semnan.ac.ir