

## حل مسئله تکمیل تنسوری با روش های GD و ADMM

رامین نصیری<sup>۱\*</sup>، محسن شاهرزایی<sup>۲</sup>، سید سیروس سقائیان پور<sup>۱</sup>، علیرضا شجاعی فرد<sup>۱</sup>

۱- گروه ریاضی و آمار، دانشکده و پژوهشکده علوم پایه، دانشگاه جامع امام حسین (ع)

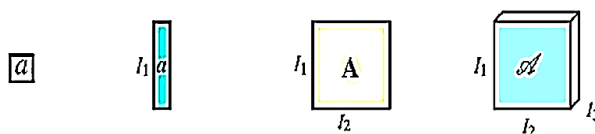
۲- دانشکده علوم و مهندسی دفاعی، دانشگاه امام حسین (ع)، تهران، ایران

**چکیده:** تکمیل تنسوری به دنبال تعیین داده‌های گمشده یا مشاهده نشده، یک تنسور مشاهده شده جزئی است روش‌های تکمیل ماتریسی و تنسوری دارای کاربردهای فراوانی در حوزه‌های گوناگون از جمله تجزیه و تحلیل کلان‌داده‌ها، پیش‌بینی براساس داده‌های جمع‌آوری شده، پردازش تصاویر و بینایی ماشین هستند. در این مقاله به صورت مختصر مسأله تکمیل تنسوری را به عنوان تعمیمی از تکمیل ماتریسی به ابعاد بالاتر بیان می‌کنیم. سپس مسأله تکمیل ماتریس و تکمیل تنسور را برای بهبود و بازبایی تصویر مخدوش شده با روش‌های بهینه‌سازی مبتنی بر نرم هسته تنسور با استفاده از حداقل سازی رتبه نرم هسته، از روش های GD و ADMM حل می نماییم.

**کلمات کلیدی:** تنسورها، تکمیل ماتریسی، تکمیل تنسوری، نرم هسته.

### ۱. مقدمه

یک تنسور یک آرایه چند راهی یا یک ماتریس چند بعدی است. مرتبه تنسور برابر با تعداد ابعاد یک تنسور است که به نام وجه‌ها یا راه‌ها نیز شناخته می‌شود [1]. تنسور را می‌توان به صورت ریاضی طبق شکل ۱ بیان کرد.



شکل ۱. آرایه سه بعدی به ترتیب از چپ به راست: تنسور مرتبه صفر، تنسور مرتبه یک، تنسور مرتبه دو، تنسور مرتبه سه (به ازای  $I_1 = 1, \dots, I_2 = 1, \dots, I_3 = 1$ ).

تنسورها از بردارها و ماتریس‌ها تشکیل می‌شوند. یک فیبر را می‌توان یک بردار یا قطعه‌ای یک بعدی از تنسورها در نظر گرفت که با ثابت نگه داشتن همه ابعاد به جز یکی از آن‌ها، شکل می‌گیرد. درحالی‌که برش یک ماتریس یا قطعه‌ای دو بعدی از یک تنسور است که با ثابت نگه داشتن بعضی ابعاد به جز دوتای آن‌ها، به وجود می‌آید [۶]. در کار با تنسورها یا به عبارتی جبر چندخطی، معمولاً تنسورها را به یک فرم ماتریسی تبدیل و از جبرخطی استفاده می‌کنیم. تنسورها را می‌توان نسبت به وجوه آن‌ها ماتریسی کرد.

فرض کنید  $\mathbb{A} = (a_{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n}$  تنسور مرتبه  $p$  با بعد  $n$  باشد. مجموعه درایه‌های تنسور  $\mathbb{A}$  که  $p - 1$  اندیس آن ثابت باشد، یک فیبر (تار) نامیده می‌شود.

در تنسور  $\mathbb{A} = (a_{ijk})_{1 \leq i, j, k \leq 2}$  که متعلق به  $\mathbb{R}^{2 \times 2 \times 2}$  است، سه نوع فیبر وجود دارد:

- ۱) دومین و سومین اندیس ثابت و اولین اندیس متغیر، منجر به فیبر ستونی می‌شود.
- ۲) اولین و سومین اندیس ثابت با اندیس دوم متغیر، منجر به فیبر سطحی می‌گردد.
- ۳) با ثابت نگاه داشتن اولین و دومین اندیس و تغییر سومین اندیس، به فیبرهایی به نام تیوب می‌رسیم.

\* Corresponding author

Email: rnasiri@ihu.ac.ir

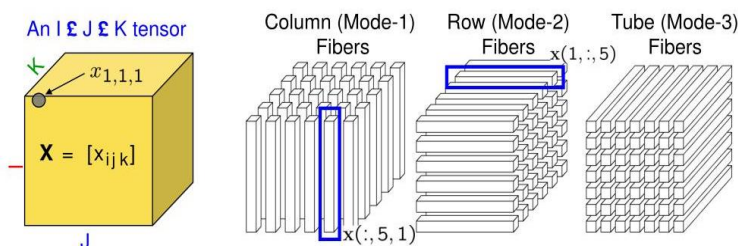
به‌عنوان مثال برای  $\mathbb{A} \in \mathcal{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ، فیبرهای سطری، ستونی و تیوب‌ها به این صورت هستند:

$$\{a_{\cdot i_2 i_3} \in \mathcal{R}^{n_1} \mid 1 \leq i_1 \leq n_1\}, \quad 1 \leq i_2 \leq n_2, 1 \leq i_3 \leq n_3$$

$$\{a_{i_1 \cdot i_3} \in \mathcal{R}^{n_2} \mid 1 \leq i_2 \leq n_2\}, \quad 1 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_3 \leq n_3$$

$$\{a_{i_1 i_2 \cdot} \in \mathcal{R}^{n_3} \mid 1 \leq i_3 \leq n_3\}, \quad 1 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_2 \leq n_2$$

شکل ۲ را ببینید.



شکل ۲. فیبرها برای یک تنسور مرتبه سوم.

فرض کنید  $\mathbb{A} = (a_{i_1 \dots i_p})_{1 \leq i_1, \dots, i_p \leq n}$  تنسوری از مرتبه  $p > 2$  با بعد  $n$  باشد، مجموعه درایه‌های تنسور  $\mathbb{A}$  که  $p - 2$  اندیس آن ثابت باشد، یک وجه (برش) نامیده می‌شود.

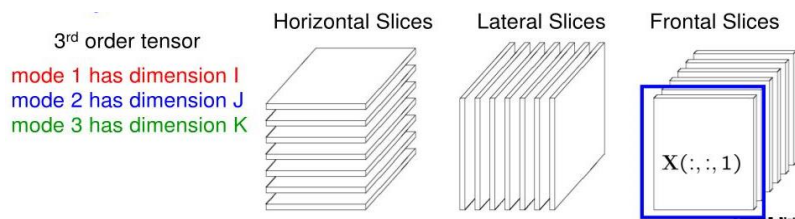
برای تنسور مرتبه سوم  $\mathbb{A} \in \mathcal{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$ ، سه مجموعه ماتریس به‌صورت

$$\{a_{::i_3} \in \mathcal{R}^{n_1 \times n_2} \mid 1 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_2 \leq n_2\}, \quad 1 \leq i_3 \leq n_3$$

$$\{a_{i_1 \cdot i_2} \in \mathcal{R}^{n_2 \times n_3} \mid 1 \leq i_1 \leq n_1, 1 \leq i_3 \leq n_3\}, \quad 1 \leq i_2 \leq n_2$$

$$\{a_{i_1 i_2 \cdot} \in \mathcal{R}^{n_1 \times n_3} \mid 1 \leq i_2 \leq n_2, 1 \leq i_3 \leq n_3\}, \quad 1 \leq i_1 \leq n_1$$

با اسامی وجه‌های جلویی، پهلوئی و افقی تنسور قابل بیان هستند، توجه داریم که تعداد  $n_1$  وجه افقی،  $n_2$  وجه پهلوئی و  $n_3$  وجه جلویی وجود دارد، شکل ۳ را ببینید.



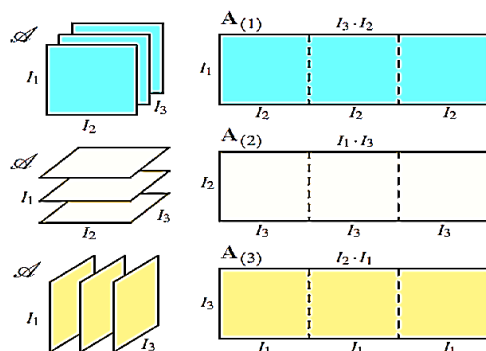
شکل ۳. وجه‌ها برای تنسور مرتبه سوم  $\mathbb{A} = [a_{ijk}] \in \mathcal{R}^{I \times J \times K}$

### ۱-۱. ماتریسی‌سازی

ماتریس شده تنسور  $N$  راهی  $\mathbb{A} \in \mathcal{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  نسبت به وجه  $n$ -ام که با  $\mathbb{A}(n)$  نشان داده می‌شود، ماتریسی است که از چینش مجدد فیبرهای یک تنسور حاصل می‌شود. عنصر  $(i_1, \dots, i_N)$  تنسور  $\mathbb{A}$  نظیر عنصر  $(i_n, j)$  در  $\mathbb{A}(n)$  است.

$$j = \sum_{k=1, k \neq n}^N (i_k - 1) J_k, \quad J_k = \prod_{m=1, m \neq n}^{k-1} I_m \quad (1-1)$$

شکل ۴ ماتریسی‌سازی را برای یک تنسور سه‌راهی نشان می‌دهد:



شکل ۴. ماتریسی‌سازی تنسور.

### ۲-۱. حاصل ضرب

حاصل ضرب وجه  $n$  تنسور  $\mathbb{A} \in \mathcal{R}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N}$  در ماتریس  $B \in \mathcal{R}^{J \times I_n}$  به صورت  $\mathbb{Y} = \mathbb{A} \times B$  نشان داده می‌شود و با  $\mathbb{Y}(n) = B\mathbb{A}(n)$  تعریف می‌شود. در این صورت یک تنسور  $I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times J \times I_{n+1} \times \dots \times I_N$  است [۶].

### ۳-۱. نرم هسته تنسور

نرم هسته‌ای  $\|\mathbb{A}\|_*$  از یک تنسور  $\mathbb{A} \in \mathcal{R}^{n_1 \times n_2 \times n_3}$  به صورت زیر تعریف شده است [۴]، مجموع مقادیر منفرد همه برش‌های جلویی  $\bar{\mathbb{A}}$ ، یعنی:

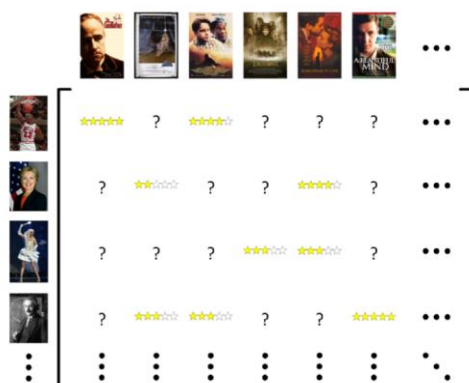
$$\|\mathbb{A}\|_* = \frac{1}{n_3} \sum_{i=1}^{n_3} \|\bar{\mathbb{A}}^{(i)}\|_*$$

### ۴-۱. مبانی تکمیل تنسوری

مسئله تکمیل تنسوری، تعمیمی از مسئله تکمیل ماتریسی برای حل نقاط ضعف آن و استفاده در حل مسائل بعد بالای کلان‌داده‌ها و تعمیم و گسترش کارایی آن‌هاست. این مسئله به صورت‌های گوناگونی قابل بیان و حل است، دو صورت کاربردی مسئله تکمیل تنسوری، براساس تجزیه (باز کردن) و بهینه‌سازی است. در تکمیل تنسوری، برای جلوگیری از نامعین و غیرقابل کنترل بودن مسئله، شرط رتبه پایین را اعمال می‌کنیم تا درجات آزادی درایه‌های گمشده را محدود نماییم در ادامه مسئله تکمیل ماتریسی را به اختصار بیان می‌نماییم [۳] و [۶]. به بیان ساده این مسئله مربوط به تکمیل کردن مقادیر (درایه‌های) ناموجود، نویزی یا پرت در یک ماتریس است، شکل ۵ را ببینید.

### ۵-۱. تکمیل ماتریسی

مسئله تکمیل ماتریسی نخستین بار در سیستم رتبه‌بندی سایت اشتراک فیلم نت فلیکس در مسئله توصیه‌گر فیلم به کاربران مطرح شد. مفاهیم کلیدی و فرضیات مورد نیاز برای تبدیل این مسئله به یک مسئله بهینه‌سازی محدب از نرم‌های ماتریس را بررسی می‌کنیم [۳].



شکل ۵. کاربرد روش تکمیل ماتریسی در سیستم رتبه بندی سایت اشتراک فیلم نت فلیکس.

به بیان ساده، تکمیل ماتریسی، تکمیل درایه‌های گمشده یک ماتریس  $n_1 \times n_2$  از نمونه‌گیری درایه‌هاست. مساله تکمیل ماتریسی به بیان ریاضی مساله بهینه‌سازی محدب  $\minimize |P_\Omega(X) - P_\Omega(M)|$  است، که در آن

$$P_\Omega(X) = \begin{cases} (i,j) & \forall (i,j) \in X \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \text{و} \quad \Omega = \{(i,j) | (i,j) \in M\}$$

را به‌گونه‌ای صفر نماییم که ماتریس جواب  $X$  کاملاً برای همه درایه‌های مفروض با ماتریس  $M$  مطابقت داشته باشد. در تکمیل ماتریسی باید حتماً حداقل یک درایه در هر سطر یا ستون مشاهده شده باشد، اگر چنین نباشد، درایه‌های آن سطر یا ستون می‌توانند هر مقدار دلخواهی باشند، بنابراین روش در این حالت پاسخگو نیست. از طرفی برای کارآمدی روش‌های تکمیل ماتریسی، باید رابطه

$$m \geq Cn^{5/4}r \log n.$$

برقرار باشد، تا ماتریس بازیافت شده از طریق تکمیل ماتریسی، منحصر بفرد گردد، جایی که ماتریس  $M$  ماتریسی  $n_1 \times n_2$  از رتبه  $r$  است و  $n = \max(n_1, n_2)$ . همچنین فرض می‌کنیم  $m$  درایه از ماتریس  $M$  با موقعیت‌های نمونه‌گیری شده یکنواخت تصادفی وجود داشته باشند،  $C$  و  $C$  نیز ثابت‌های عددی وجودی هستند. به دلیل این محدودیت‌ها مساله تکمیل تنسوری به عنوان تعمیمی از تکمیل ماتریسی مطرح شده است.

### ۶-۱. تکمیل تنسوری

می‌توان مساله تکمیل تنسوری را به‌صورت یک مساله بهینه‌سازی محدب به‌صورت

$$\minimize_X \text{rank}_*(\mathcal{X}) \\ \mathcal{X}_\Omega = \mathcal{T}_\Omega$$

در نظر گرفت، که به دنبال تنسور  $\mathcal{X}$  با حداقل رتبه (مشخص از نوعی معین) هستیم، که شرط برابری با تنسور مشاهده شده جزئی  $\mathcal{T}$  در مجموعه اندیس داده شده را برآورده نماید [۱].

در عمل، در تکمیل تنسوری از طریق تجزیه یا باز کردن تنسور به‌صورت ماتریس‌ها، با در اختیار داشتن مجموعه اندیس مناسب و براساس تنسور جزئی مشاهده شده، به دنبال یافتن تنسور کامل هستیم.

روش‌های گوناگونی برای حل مسائل تکمیل تنسوری وجود دارد، که از آن جمله می‌توان به روش‌های مبتنی بر نرم، روش‌های مبتنی بر تجزیه، روش‌های کمترین مربعات و روش‌های نیوتنی اشاره نمود. برای اطلاعات بیشتر درباره انواع روش‌های حل مسائل تکمیل تنسوری می‌توانید به مراجعه نمایید [۵].

## ۲. نتایج اصلی

### ۱-۲. بهبود و بازیابی تصاویر مخدوش شده الگوریتم‌های تکمیل ماتریس و تنسور مبتنی بر نرم هسته تنسور

در این بخش حل مسأله تکمیل ماتریس و تکمیل تنسور با روش‌های بهینه‌سازی مبتنی بر نرم هسته تنسور با استفاده از حداقل‌سازی رتبه نرم هسته، با برنامه‌نویسی متلب انجام شده است. ابتدا یک تصویر اولیه را مخدوش (نویزدار) کرده، سپس دو کد GD و ADMM را برای بهبود و بازیابی تصویر مخدوش شده با حداکثر تعداد تکرار ۵۰۰، طول گام ۰.۲ با نویز ۳۰ درصد برای ماتریس و تنسور اجرا کرده که خروجی آن، تصویر مخدوش شده، تصویر بهبود یافته (بازیابی شده)، مدت زمان اجرای برنامه، PSNR و رسم مشترک نمودارهای هر دو کد GD و ADMM با هم، برای هر دو مسأله و همه هفت تصویر خروجی (محور عمودی بیانگر مقدار PSNR بر حسب دسی‌بل و محور افقی معرف تعداد تکرار کدهای بهینه‌سازی نرم هسته) را شامل می‌شود که تمامی نتایج بسیار رضایت بخش و مفید بوده و بهبود و بازیابی تصویر به‌طور مناسب انجام شده است. جدول ۱ شامل دو بخش است، در بخش چپ، به تکمیل ماتریس و در بخش راست به تکمیل تنسور پرداخته شده است که در هر کدام به ترتیب از چپ به راست تصویر اولیه، تصویر مخدوش شده و تصاویر بازیابی شده توسط الگوریتم‌های مربوطه نمایش داده شده است.

جدول ۱. بهبود و تکمیل تصاویر مخدوش شده با روش‌های مبتنی بر نرم هسته تنسور.

		الگوریتم‌ها							
		تکمیل ماتریس (MC)				تکمیل تنسور (TC)			
نام تصویر	تصویر اصلی	تصویر مخدوش شده	بازیابی با الگوریتم‌های		تصویر اصلی	تصویر مخدوش شده	بازیابی با الگوریتم‌های تعمیم یافته		
			GD	ADMM			GD*	ADMM*	
Farmer									
Gazelle									
Giraffe									
Mountain									
Plain									
Tiger									

## ۲-۲. زمان و PSNR

در این بخش، نتایج مربوط به مقادیر زمان و PSNR حاصل از اجرای الگوریتم‌های تکمیل ماتریسی و تکمیل تنسوری مبتنی بر نرم هسته تنسور اجرا شده در نرم افزار متلب در جدول گردآوری شده است. قابل ذکر است که معمولاً در بازیابی تصاویر در صورتی که مقدار PSNR کمتر از ۱۲ دسی‌بل باشد، بیانگر وجود مشکل جدی نویز در خطوط انتقال است، و اگر این مقدار بالاتر از ۲۰ دسی‌بل باشد نتیجه رضایت‌بخش خواهد بود و در نهایت اگر این مقدار بالاتر از ۳۰ دسی‌بل گردد نتیجه بسیار مناسب خواهد بود.

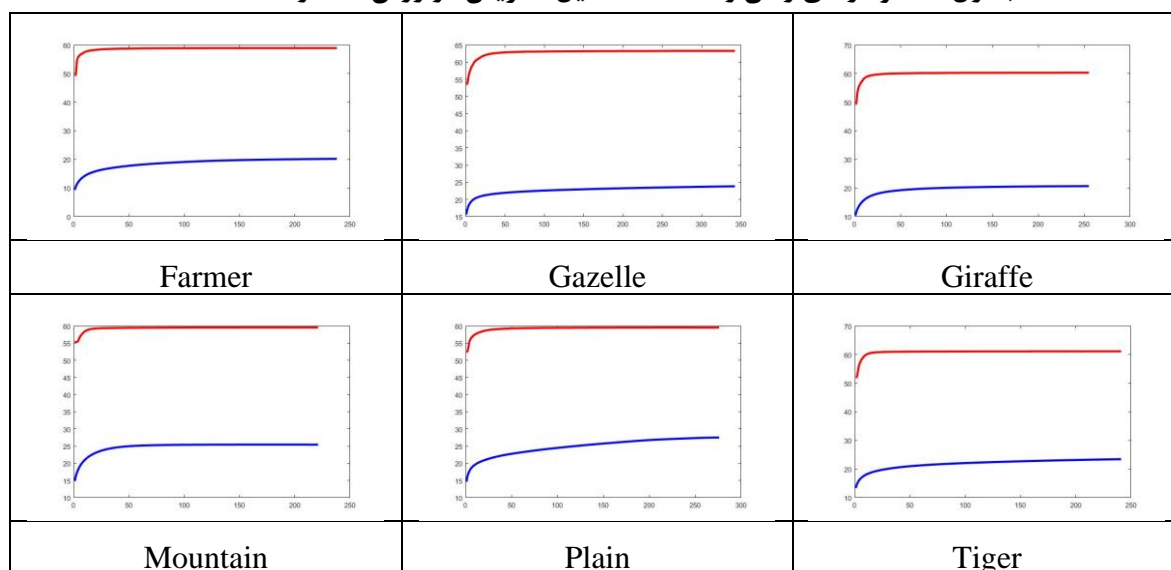
جدول ۲. نمودار PSNR و زمان الگوریتم‌های تکمیل ماتریسی و تکمیل تنسور.

الگوریتم‌ها	تکمیل ماتریسی (MC)								تکمیل تنسور (TC)			
	GD				ADMM				GD*		ADMM*	
	PSNR	زمان	PSNR	زمان	PSNR	زمان	PSNR	زمان	PSNR	زمان	PSNR	زمان
<b>Farmer</b>	۲۰/۰۰	۷۲/۵۱	۵۸/۹۱	۳۷/۲۷	۲۱/۰۵	۱۸۹/۳۹	۲۲/۳۱	۱۶۱/۹۰				
<b>Gazelle</b>	۲۴/۲۹	۵۱/۹۵	۶۳/۲۶	۳۶/۷۹	۲۳/۶۳	۲۲۹/۹۳	۲۶/۶۶	۱۱۹/۹۹				
<b>Giraffe</b>	۲۰/۸۲	۵۱/۵۶	۶۰/۲۸	۲۸/۵۶	۱۹/۴۸	۱۲۰/۷۱	۲۱/۸۹	۱۱۶/۱۰				
<b>Mountain</b>	۲۵/۳۰	۱۵۲/۶۴	۵۹/۵۵	۶۶/۱۷	۲۱/۸۷	۲۳۳/۴۵	۲۴/۶۱	۳۰۶/۶۸				
<b>Plain</b>	۲۷/۰۱	۲۱۹/۲۸	۷۰/۸۷	۲۳۲/۳۶	۲۱/۰۱	۱۶۸/۳۵	۲۳/۹۹	۱۱۷/۷۲				
<b>Tiger</b>	۲۴/۵۷	۴۷/۷۶	۶۱/۱۲	۲۴/۹۲	۱۸/۱۵	۱۵۱/۸۷	۲۲/۴۳	۱۵۰/۰۰				

## ۲-۳. نمودار PSNR برای تکمیل ماتریسی

در این قسمت، نتایج بدست آمده نمودارهای زمان و PSNR تکمیل ماتریسی در دو روش GD و ADMM آورده شده است. در هر یک از این نمودارها، منحنی پایینی (آبی رنگ) خروجی روش GD و منحنی بالایی (قرمز رنگ) خروجی روش ADMM است. لازم به ذکر است که محور افقی هر نمودار بیانگر تعداد تکرار و محور عمودی بیانگر مقدار PSNR است.

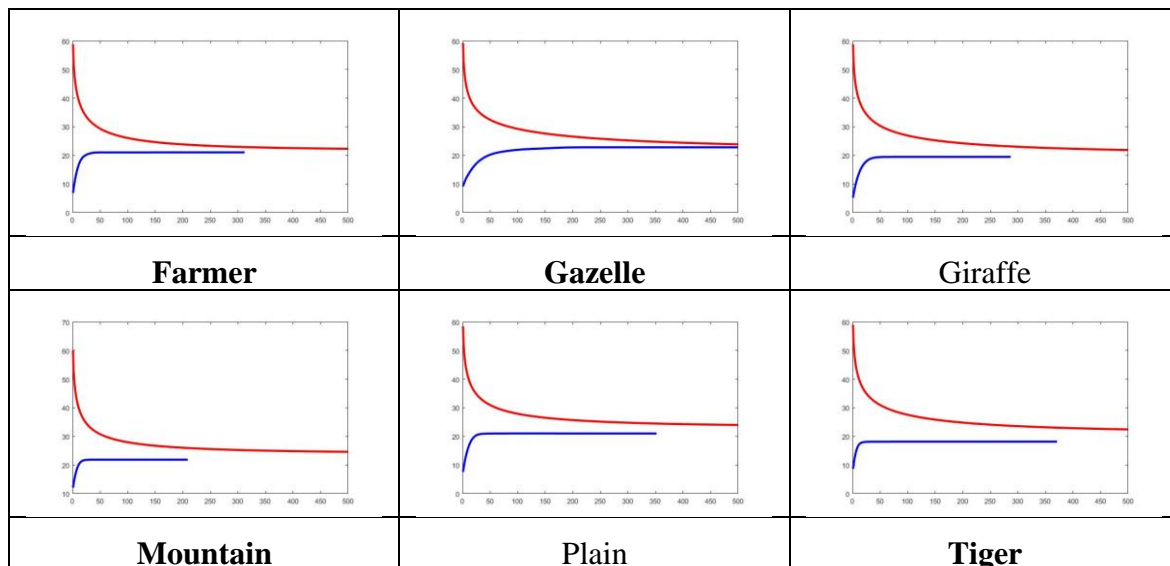
جدول ۳. نمودارهای زمان و PSNR تکمیل ماتریسی دو روش GD و ADMM.



#### ۲-۴. نمودار $PSNR$ برای تکمیل تنسور

در این قسمت، نتایج بدست آمده نمودارهای زمان و  $PSNR$  تکمیل تنسوری در دو روش  $GD$  و  $ADMM$  آورده شده است. در هر یک از این نمودارها، منحنی پایینی (آبی رنگ) خروجی روش  $GD$  و منحنی بالایی (قرمز رنگ) خروجی روش  $ADMM$  است. لازم به ذکر است که محور افقی هر نمودار بیانگر تعداد تکرار و محور عمودی بیانگر مقدار  $PSNR$  است.

جدول ۴-۵: نمودارهای زمان و  $PSNR$  تکمیل تنسور دو روش  $GD$  و  $ADMM$ .



#### ۳. نتیجه گیری

روش‌های تجزیه و تحلیل داده‌ها با تنسورها، به عنوان ساختارهای بزرگ مقیاس ریاضی دارای فواید بسیاری در زمینه‌های گوناگون به ویژه پردازش تصاویر دیجیتال و بینایی ماشین است. در این مقاله مساله تکمیل ماتریسی و تکمیل تنسوری به وسیله دو روش  $GD$  و  $ADMM$  مورد بررسی قرار گرفت. نتایج بسیار خوبی در بازیابی تصاویر مخدوش شده بدست آمد.

#### ۴. مراجع

- [۱] Ashraphijuo, M. and X. Wang, Fundamental conditions for low-CP-rank tensor completion. The Journal of Machine Learning Research, 2017. 18(1): p. 2116-2145.
- [۲]. Liu, Y., et al. Factor matrix trace norm minimization for low-rank tensor completion. in Proceedings of the 2014 SIAM International Conference on Data Mining. 2014. SIAM.
- [۳]. Zhang, Z. and S. Aeron, Exact tensor completion using t-SVD. IEEE Transactions on Signal Processing, 2016. 65(6): p. 1511-1526.
- [۴]. Papalexakis, E.E., C. Faloutsos, and N.D. Sidiropoulos, Tensors for data mining and data fusion: Models, applications, and scalable algorithms. ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology (TIST), 2016. 8(2): p. 1-44.
- [۵]. Rauhut, H., R. Schneider, and Ž. Stojanac, Tensor completion in hierarchical tensor representations, in Compressed sensing and its applications. 2015, Springer. p. 419-450.
- [۶]. Zhou, P., et al., Tensor Factorization for Low-Rank Tensor Completion. IEEE Transactions on Image Processing, 2018. 27(3): p. 1152-1163.