هفتمین کنفرانس بین‌المللی
ترکیبیات، رمزنگاری، علوم کامپیوتر و محاسبات
۲۵ و ۲۶ آبان ۱۴۰۱

محاسبه اندیس سگد یالی در گراف مربع- هشت ضلعی سطری و ستونی متصل

امیر بهرامی [۱و*] ، جعفر اسدپور [۲]

۱- گروه ریاضی، واحد ماهشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، ماهشهر، ایران.

۲- گروه ریاضی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

چکیده

شاخص سگد یالی از یک گراف $G=(V,E)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Sz_e(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} m_u(e\mid G)\cdot m_v(e\mid G)$$

که درآن $m_u(e|G)$ عبارتست از تعداد یال‌هایی که فاصله آنها تا رأس u کمتر از فاصله آنها تا رأس v باشد و $m_v(e\mid G)$ برابرست با تعداد یال‌هایی که فاصله آنها تا رأس v کمتر از فاصله آنها تا رأس u باشد. در این مقاله قصد داریم اندیس سگد یالی در گراف مربع- هشت ضلعی را تعیین نماییم.

کلمات کلیدی : ح شاخص سگد، شاخص سگد یالی، گراف مربع- هشت ضلعی

۱. مقدمه

گراف $G=(V,E)$ عبارت است از زوج مرتب $(V(G),E(G))$، که در آن $V(G)$ یک مجموعه غیر تهی از عناصر است که هر یک از عناصر آن را یک رأس می‌نامیم و $E(G)$ خانواده ای از زوج‌های نامرتب از رأس‌های گراف است که به هر زوج یک یال می‌گوییم.

مجموعه‌ی $V(G)$ را با V نشان می‌دهیم و به این مجموعه، مجموعه رئوس می‌گوییم. هم‌چنین $E(G)$ را با E نشان می‌دهیم و این مجموعه را، مجموعه یال‌های گراف می‌نامیم و عناصر آن را به صورت uv و در بعضی مواقع با e نشان می‌دهیم.

در سالهای اخیر دانشمند بزرگ، ایوان گوتمن در [۱] یک ثابت از گراف مبتنی بر فاصله معرفی کرد و برخی از خواص اساسی آن را بررسی کرد. تحقیقات در این زمینه به طور خاص ادامه یافت و در سال ۱۹۹۵ شاخص جدیدی بنام شاخص سگد معرفی ی شد و با Sz نشان داده شد [2,3]، و این نماد به صورت یک نماد کاربردی در دنیا پذیرفته شده است.

محققان بسیاری کارهای اولیه روی شاخص سگد را دنبال کردند و تعداد بسیار زیادی مقاله روی شاخص سگد چاپ نمودند که بعضی از آنها به محاسبه خواص شاخص سگد و تعیین فرمولهای ریاضی جالب جهت تعیین این شاخص با تکنیک های خاص نمودند.

همچنین در سالهای اخیر،شاخص سگد در گراف های فاقد دور را مورد مطالعه و بررسی قرار داده اند [3-5]و نتایج جالبی در این گراف ها بدست آورده اند .

پس از آن دانشمندانی چون گوتمن، کلوزار اندیس سگد یالی را به صورت زیر تعریف نمودند :

$$Sz_e(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} m_u(e\mid G)\cdot m_v(e\mid G)$$

که درآن $m_u(e|G)$ عبارتست از تعداد یال‌هایی که فاصله آنها تا رأس u کمتر از فاصله آنها تا رأس v باشد و $m_v(e\mid G)$ برابرست با تعداد یال‌هایی که فاصله آنها تا رأس v کمتر از فاصله آنها تا رأس u باشد.

* Corresponding author: Email: bahrami_ut@yahoo.com

در مراجع [8-5]نتایج جالبی در مورد اندیس سگد یالی توسط دانشمندان ارایه شده است . با ادامه روند آنها این اندیس را در این مقاله برای گراف نانولوله هشت ضلعی چهارضلعی تعیین می نماییم.

در تمامی قسمت های این مقاله، گراف های مورد بحث، ساده و متناهی و غیر جهتدار می باشند و نمادگذاری ها مطابق مراجع [11-9] می باشند.

۳. نتایج و بحث ها

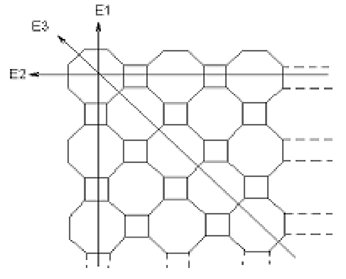
در این بخش به محاسبه اندیس سگد یالی در گراف مربع- هشت ضلعی می پردازیم

قضیه. فرض کنیم $G=(V,E)$ گراف متناظر با گراف مربع- هشت ضلعی شکل ۱ باشد در این صورت داریم:

$$Sz_e(T)=\frac{mn}{4}\times \begin{cases} 27n^2m^2-30n^2m-12nm^2+12nm+13n^2+4m^2-12n+4 & n\le m \\ 27n^2m^2-30nm^2-12n^2m+12nm+13m^2+4n^2-12m+4 & n>m \end{cases}$$

اثبات.

فرض کنید **T** گراف مربع- هشت ضلعی سطری و ستونی متصل مطابق شکل ۱ باشد. در این صورت این گراف دارای ۲n سطر با m رأس در هر سطر و ۲m ستون با n رأس در هر ستون می‌باشد. لذا گراف T دقیقاً ۲mn رأس و ۳mn یال دارد.



شکل 1 – گراف مربع- هشت ضلعی

در این گراف سه نوع یال عمودی ، افقی و مورب داریم در هر کدام از این نوع یالهامانند e=uv مقادیر $m_u(e|G)$ و $m_v(e|G)$ را تعیین می نماییم.

فرض کنید $e=uv\in E(T)$ یک یال افقی در سطر E_1 باشد. (. مجموعه $N_u(e|T)$ شامل رأس‌های ستون‌های $C_m,\dots,C_1$ می‌باشد. چون هر ستون n رأس دارد، لذا اندازه $N_u(e|T)$ برابر با mn است. به وضوح دیده می‌شود که رأس‌های ستون C_1 و C_m، درجه آنها ۲ می- باشد و بقیه رأس‌ها در ستون‌های دیگر از درجه ۳ هستند. بنابراین $m_u(e|T)=\frac{1}{2}(3mn-2n)$. به طور مشابه خواهیم داشت

$$m_v(e|T)=\frac{1}{2}(3mn-2n)$$
.

فرض کنید $e=uv\in E(T)$ یک یال عمودی باشد. مشابها خواهیم داشت: $m_u(e|T)=m_v(e|T)=\frac{1}{2}(3mn-2m)$.

همچنین اگر $e=uv\in E(T)$ یک یال مورب باشد .

ابتدا فرض می‌کنیم $n\ge m$. در این صورت لذا

$$|N_u(e|T)|=m(n-2)+4(\tfrac{m}{2})=mn$$
.

تعداد رأس‌های مجموعه $N_u(e|T)$ که درجه‌های آنها مساوی ۲ است، برابر با ۲-۳m می‌باشد و درجه بقیه رأس‌ها مساوی ۳ است. بنابراین $m_u(e|T)=\frac{1}{2}(3mn-3n+2)$. از طرفی T متقارن است، لذا

$$m_v(e|T)=\frac{1}{2}(3mn-3n+2)$$

حال اگر $n<m$، آنگاه داریم:

$$m_u(e|T)=m_v(e|T)=\frac{1}{2}(3mn-3m+2)$$

در نتیجه :

$$Sz_e(T)=\frac{mn}{4}\times \begin{cases} 27n^2m^2-30n^2m-12nm^2+12nm+13n^2+4m^2-12n+4 & n\le m \\ 27n^2m^2-30nm^2-12n^2m+12nm+13m^2+4n^2-12m+4 & n>m \end{cases}$$

و اثبات کامل است.

4 . مراجع

[1]. H. Wiener, Structural Determination of Paraffin Boiling Points, J. Am. Chem. Soc. 69-73 (1947)
[2]. I. Gutman and S. Klavˇzar; An algorithm for the calculation of the Szeged index of benzenoid hydrocarbons, J. Chem. Inf. Comput. Sci., 35, 1011–1014 (1995).
[3]. X. Cai and B. Zhou, Edge Szeged index of unicyclic graphs, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 63 (2010) 133–144
[4]. E. Chiniforooshan and B. Wu, Maximum values of Szeged index and edge-Szeged index of graphs, Elec. Notes Discrete Math. 34 (2009) 405–409.
[5]. M. R. Darafsheh, R. Modabernia and M. Namdari, Computing Szeged index of graphs on triples, Iranian J. Math. Chem. 8 (2017) 175–180.
[6]. K. C. Das and M. J. Nadjafi-Arani, On maximum Wiener index of trees and graphs with given radius, J. Comb. Optim. 34 (2017) 574–587.
[7]. N. Dehgardi, A note on revised Szeged index of graph operations, Iranian J. Math. Chem. 9 (2018) 57–63
[8]. H. Dong, B. Zhou and C. Trinajstić, A novel version of the edge-Szeged index, Croat. Chem. Acta 84 (2011) 543–545.
[9].J. Bondy and U. Murty, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 2008
[10].N. Trinajsti}, Chemical Graph Theory, CRC Press, Boca Raton (FL), 1983.
[11].I. Gutman, Graph Theory Notes New York 27 (1994) 9–15