محاسبه اندیس سگد یالی در زنجیرهای مربع‌آرایی

جعفر اسدپور[1,*]، امیر بهرامی[2]

۱- عنوان گروه ریاضی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

۲- گروه ریاضی، واحد ماهشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، ماهشهر، ایران.)

چکیده

یک مربع‌آرایی یک شکل هندسی مسطح است که با اتصال چند مربع مساوی به صورت یال به یال تشکیل می‌شود. در *مربع‌آرایی* یک گراف مسطح متناهی ۲-همبند است به طوری که هر وجه داخلی (که به آن نظریه گراف یک سیستم حجره می‌نامند) توسط یک مربع منظم احاطه می‌شود. به عبارتی دیگر، آن یک اجتماع همبند یالی از حجره‌ها می‌باشد. در در این مقاله قصد داریم اندیس سگد یالی در زنجیرهای مربع‌آرایی را تعیین نماییم.

کلمات کلیدی: *شاخص سگد یالی، شاخص سگد*، زنجیرهای مربع‌آرایی

مقدمه

یک گراف $G=(V,E)$ از مجموعه‌ای غیر خالی از اشیاء به نام رأس تشکیل شده، که آن را با $V(G)$ نشان می‌دهیم، و مجموعه‌ای شامل یال‌ها، که رأس‌ها را به هم وصل می‌کنند و با $E(G)$ نمایش می‌دهیم. یک چنین گرافی را با G نشان می‌دهیم. اگر یال eدو رأس u و v را به هم وصل کند می‌نویسیم e=uv .

نظریه گراف اخیرا توجه بسیاری از دانشمندان را به خود جلب نمود و شاخص های بسیاری در گراف ها تعریف گردید. در زیر به برخی از آنها اشاره می نماییم.

یکی ازاولین شاخص ها از گراف بر اساس فاصله و طول آن توسط وینر در [۱] در سال ۱۹۴۷ تعریف شد که با بعضی از مطالعات روی خواص گراف‌های فاقد دور معرفی گردید . اخیراً به یکی از موضوعات اصلی تبدیل شده است که توجه شیمیدانان نظری را به آن متمرکز می‌کند.

در سالهای اخیر دانشمند بزرگ، ایوان گوتمن در [۱] شاخص وینر را به عنوان یکی ازاولین شاخص ها از گراف بر اساس فاصله و طول آن معرفی کرد . تحقیقات در این زمینه به طور خاص ادامه یافت . به دنبال آنها، دانشمند بزرگ دی جی کلاین و همکارانش تعریف رندیک را برای همه گراف‌های همبند به عنوان یک توسیع از شاخص وینر تعمیم دادند [۲].

پس از آن شاخص جدیدی بنام شاخص سگد راسی معرفی ی شد و با Sz نشان داده شد [3]و ابتدا به صورت زیر تعریف گردید:

$$Sz(G)=\sum_{e\in E(G)} N_{i,e}N_{j,e}$$

محققان بسیاری کارهای اولیه روی شاخص سگد را دنبال کردند و تعداد بسیار زیادی مقاله روی شاخص سگد چاپ نمودند که بعضی از آنها به محاسبه خواص شاخص سگد با ایده های خاص نمودند.

همچنین در سالهای اخیر،شاخص سگد در گراف های فاقد دور را مورد مطالعه و بررسی قرار داده اند [3-5]و نتایج جالبی در این گراف ها بدست آورده اند.

در ادامه ی کار آنها دانشمندان دیگر اندیس سگد یالی را به صورت زیر تعریف نمودند :

$$Sz_e(G)=\sum_{e=uv\in E(G)} m_u(e\,|\,G)\cdot m_v(e\,|\,G)$$

* Corresponding author: Email: jafar_asadpour@yahoo.com

که درآن $m_u(e|G)$ عبارتســـت از تعداد یال‌هایی که فاصـــله آنها تا رأس u کمتر از فاصـــله آنها تا رأس v باشـــد و $m_v(e|G)$ برابرست با تعداد یال‌هایی که فاصله آنها تا رأس v کمتر از فاصله آنها تا رأس u باشد.

در مراجع [5-8]نتایج جالبی در مورذ اندیس سگد یالی توسط دانشمندان ارایه شده است .

پس از آنها دانشمندانی چون اخیرا دانشمندانی چون کلانرو دانشمندان دیگر در مراجع[9-11]به بحث مربع آرایی روی آوردندد و مقالات مهمی را در این زمینه و فاصله ها در این گراف ها درمجلات علمی به چاپ رسانده اند.

با ادامه روند آنها این اندیس را در این مقاله برای مربع زنجیرآرایی تعیین می نماییم.

در تمامی قســـمت های این مقاله، گراف های مورد بحث، ســـاده و متناهی و غیر جهتدار می باشـــند و نمادگذاری ها مطابق مراجع [12-14] می باشند.

۲. نتایج و بحث ها

در این بخش به محاسبه اندیس سگد یالی در گراف زنجیر مربع آرایی می پردازیم.

قضیه. فرض کنیم $G=(V,E)$ گراف متناظر با گراف زنجیر مربع آرایی شکل ۱ باشد در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} Sz_e(G) &= \left(-2kx-\tfrac{2}{3}xy^2\right)\sum_{i=1}^{s}\ell_i^{\,3}+\left(2xy^2-2kx+4knxy\right)\sum_{i=1}^{s}\ell_i^{\,2}-y^2\sum_{i=2}^{s-1}\ell_i^{\,2}\alpha_{i+1}\\ &-\left(4kx^2+\tfrac{4}{3}xy^2+2nxy^2\right)\sum_{i=1}^{s}\ell_i+\left(y(4x-1)+ny^2\right)\sum_{i=2}^{s-1}\ell_i\alpha_{i+1}-y\sum_{i=2}^{s-1}\ell_i\alpha_{i+1}^2\\ &-\left(2y(k-1)+3nxy\right)\sum_{i=2}^{s-1}\alpha_{i+1}+3x\sum_{i=2}^{s-1}\alpha_{i+1}^2-2y^2(k-1)\ell_1^{\,2}+2y^2(k-1)(n+1)\ell_1\\ &+\left(8k^2x+2nx^2y\right)s+2ny(3k-1)-8kx^2, \end{aligned}$$

که در آن، $x=(2k-1)$ ، $y=(4k-1)$ و $\alpha_{i+1}=\sum_{r=i+1}^{s}|E'(S_r)|$.

اثبات. فرض کنیم $G=(V,E)$ گراف متناظر با گراف زنجیر مربع آرایی شـکل ۱ باشـد شـاخص سـگد یالی را به روش برش‌های مقدماتی که در زیر آن را شرح می‌دهیم، محاسبه می‌کنیم.

حال فرض کنید $n_1(C)$ و $n_2(C)$ تعداد رأس‌ها در دو طرف برش C باشـند. بدیهی اسـت که $n_1(C)+n_2(C)$ مستقل از برش C است و لذا $n_1(C)+n_2(C)=|V(G)|$.

اگر $|C|$ تعداد یال‌هایی باشند که بوسیله برش C قطع می‌شوند، لذا داریم:

$$Sz_e(G)=\sum_{C}|C|\,m_1(C)m_2(C)$$

که در آن، $m_1(C)$ و $m_2(C)$ تعداد یال‌ها در دو طرف برش C می‌باشند و $m_2(C)=|E(G)|-m_1(C)-|C|$.

حال با استفاده از این روش و این مطلب که

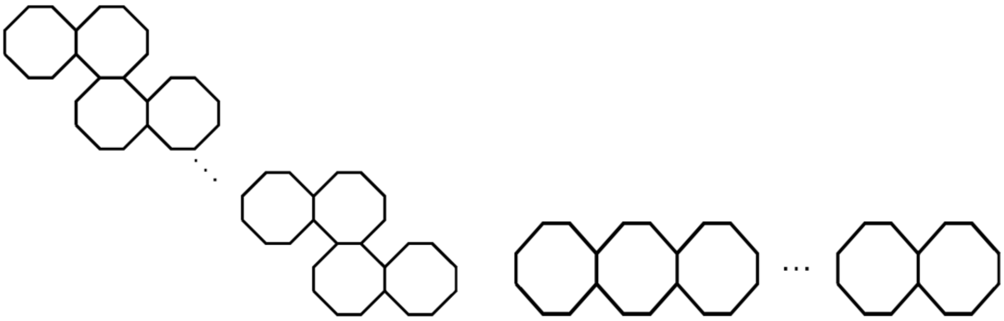
$$Sz_e(G)=\sum_{e=uv\in E(B_{n,k|\ell})}m_u(e|G)m_v(e|G)=\sum_{e=uv\in E(S_1)}m_u(e|G)m_v(e|G)$$

$$+\sum_{i=2}^{s-1}\sum_{e=uv\in E'(S_i)}m_u(e|G)m_v(e|G)+\sum_{e=uv\in E'(S_s)}m_u(e|G)m_v(e|G).$$

با محاسبات برای S_1، S_i $(2\le i\le s-1)$ و S_s به طور جداگانه داریم:

$$\begin{aligned}
Sz_e(G) &= \left(-2kx - \tfrac{2}{3}xy^2\right)\sum_{i=1}^{s}\ell_i^{3} + \left(2xy^2 - 2kx + 4knxy\right)\sum_{i=1}^{s}\ell_i^{2} - y^2\sum_{i=2}^{s-1}\ell_i^{2}\alpha_{i+1}\\
&- \left(4kx^2 + \tfrac{4}{3}xy^2 + 2nxy^2\right)\sum_{i=1}^{s}\ell_i + \left(y(4x-1) + ny^2\right)\sum_{i=2}^{s-1}\ell_i\alpha_{i+1} - y\sum_{i=2}^{s-1}\ell_i\alpha_{i+1}^2\\
&- \left(2y(k-1) + 3nxy\right)\sum_{i=2}^{s-1}\alpha_{i+1} + 3x\sum_{i=2}^{s-1}\alpha_{i+1}^2 - 2y^2(k-1)\ell_1^{2} + 2y^2(k-1)(n+1)\ell_1\\
&+ \left(8k^2x + 2nx^2y\right)s + 2ny\left(3k-1\right) - 8kx^2,
\end{aligned}$$

که در آن، $x = (2k-1)$، $y = (4k-1)$ و $\alpha_{i+1} = \sum_{r=i+1}^{s}|E'(S_r)|$.



شکل 1 – گراف زنجیر آرایی

منابع و مراجع :

[1]. H. Wiener, Structural Determination of Paraffin Boiling Points, J. Am. Chem. Soc. 69-73 (1947)
[2]Klein, D.J., Lukovits, I., Gutman, I., (1995) On the definition of the hyper-Wiener index for cycle-containing structures, *J. Chem. Inf. Comput. Sci*., 35, 50–52
[3]. I. Gutman and S. Klavˇzar; An algorithm for the calculation of the Szeged index of benzenoid hydrocarbons, J. Chem. Inf. Comput. Sci., 35, 1011–1014 (1995).
[4]. E. Chiniforooshan and B. Wu, Maximum values of Szeged index and edge-Szeged index of graphs, Elec. Notes Discrete Math. 34 (2009) 405–409.
[5]. M. R. Darafsheh, R. Modabernia and M. Namdari, Computing Szeged index of graphs on triples, Iranian J. Math. Chem. 8 (2017) 175–180.
[6]. K. C. Das and M. J. Nadjafi-Arani, On maximum Wiener index of trees and graphs with given radius, J. Comb. Optim. 34 (2017) 574–587.
[7]. N. Dehgardi, A note on revised Szeged index of graph operations, Iranian J. Math. Chem. 9 (2018) 57–63
[8]. H. Dong, B. Zhou and C. Trinajstić, A novel version of the edge-Szeged index, Croat.
[9]. D.A. Klarner, *Polyominoes*. In: Goodman, J.E., Chem. Acta 84 (2011) 543–545. O'Rourke, J. (eds.) Handbook of Discrete and Computational Geometry, 225–242. CRC Press, Boca Raton, Chapter (1997) 12 8-15.
[10]Golomb, S. W., (1954) Checker boards and polyominoes. *Am. Math. Mon*.١٩٥٤ 61, 675–682.
[11] Golomb, S.W.,(1965) *Polyominoes*. Charles Scribner's Sons.١٩٩٤ ١٠1, 75–٨١.

[12].J. Bondy and U. Murty, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 20089
[13].N. Trinajsti}, Chemical Graph Theory, CRC Press, Boca Raton (Fl), 1983.
[14].I. Gutman, Graph Theory Notes New York 27 (1994) 9–15