

تعیین اندیس امگا در برخی گراف‌ها

علیرضا گیلانی^{1*}، امیر بهرامی²

۱- گروه ریاضی، واحد تهران جنوب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

۲- گروه ریاضی، واحد ماهشهر، دانشگاه آزاد اسلامی، ماهشهر، ایران.

چکیده

فیلین‌ها یک خانواده از گراف‌ها هستند که متشکل از دورهای به طول ۴ و ۶ می‌باشند. هر ۴-دور (مربع) با دو ۶-دور (شش ضلعی) مجزا همسایه می‌باشد و هیچ دو شش ضلعی با هم مجاور نیستند. در این مقاله، قصد داریم با تکنیک‌های خاص، اندیس امگا در این گراف‌ها را تعیین نماییم.

کلمات کلیدی: اندیس امگا، گراف، گراف فیلین‌ها

مقدمه

یک گراف $G = (V, E)$ از مجموعه‌ای غیرتهی به نام رأس‌ها تشکیل شده، که آن را با $V(G)$ نشان می‌دهیم، و مجموعه‌ای دیگر شامل یال‌ها، که رأس‌ها را به هم وصل می‌کنند و آن را با $E(G)$ نمایش می‌دهیم. از نظر ریاضی، یک اندیس در یک گراف، یک مقدار حقیقی است که به آن گراف نسبت داده می‌شود و معرف برخی از خواص آن می‌باشد. تاکنون صدها شاخص توپولوژیک و کاربردهای زیادی از آنها در سایر علوم پیدا شده است که از معروفترین آنها شاخص وینر (W)، شاخص سگد، شاخص پادماکار-ایوان (PI) راسی و یالی می‌باشند. (مراجع [1-5] را ببینید).

در سال‌های اخیر دانشمندان بزرگی به نام دیودیه در مراجع [6-7] اندیس امگا را به صورت زیر تعریف نمود و مقالات بسیاری درباره این اندیس چاپ نموده است.

برای تعریف اندیس امگا، فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ یک گراف همبند باشد. یال‌های $e = uv$ و $f = xy$ از گراف G را هم‌فاصله گوئیم و با نماد $e \text{ co } f$ نشان می‌دهیم هرگاه در رابطه زیر صدق کنند: [۷]

$$d(v, x) = d(v, y) + 1 = d(u, x) + 1 = d(u, y) .$$

بعضی از یال‌های یک گراف همبند در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$e \text{ co } e \quad (i)$$

$$e \text{ co } f \Leftrightarrow f \text{ co } e \quad (ii)$$

$$e \text{ co } f \ \& \ f \text{ co } h \Rightarrow e \text{ co } h \quad (iii)$$

همچنین فرض کنید $C(e) := \{f \in E(G) \mid f \text{ co } e\}$ نشان دهنده مجموعه یال‌هایی از G باشد که با یال e هم‌فاصله هستند. اگر رابطه CO یک رابطه هم‌ارزی باشد.

یال‌های $e = uv$ و $f = xy$ از گراف G ، متقابل (یعنی یال‌های که در یک وجه یا یک حلقه داخلی روبروی هم باشند) یا به طور بدیهی موازی باشند که این رابطه را با نماد $e \text{ op } f$ نشان می‌دهیم. یک مجموعه از یال‌های متقابل، در داخل همان وجه، تشکیل یک برش از وجه‌های مجاور می‌دهند که برش یالی متقابل می‌نامیم. رابطه OC در کل گراف تعریف می‌شود در حالی که رابطه OP فقط در یک وجه از گراف تعریف می‌شود. طول OPS ، برابر با تعداد یال‌هایی است که در برش قطع می‌شوند.

* Corresponding author: Email: a_gilani@azad.ac.ir

حال فرض کنید $m(G, c)$ تعداد برش‌های ops از طول c باشد. شاخص امگا را با $\Omega(G)$ نشان داده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega(G) = \sum_c m(G, c)$$

در ادامه، این لندیس را در گراف فنیلین‌ها تعیین می‌نماییم و با تکنیک‌های خاص برخی خواص این گرافها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

همچنین، در تمامی قسمت‌های این مقاله، گراف‌های مورد بحث، ساده و متناهی و غیر جهت‌دار می‌باشند و نمادگذاری‌ها مطابق مراجع [8] می‌باشند.

۲. نتایج و بحث‌ها

فنیلین‌ها یک خانواده از گراف‌ها هستند که متشکل از دورهای به طول ۴ و ۶ می‌باشند. هر ۴-دور (مربع) با دو ۶-دور (شش ضلعی) مجزا همسایه می‌باشد و هیچ دو شش ضلعی با هم مجاور نیستند (شکل ۱ را ببینید). در این بخش به محاسبه اندیس امگا در گراف فنیلین می‌پردازیم.

قضیه. اندیس امگا در یک گراف فنیلین، مستقل از طول و تعداد قطعه‌ها می‌باشد و مساوی با $3n$ است.

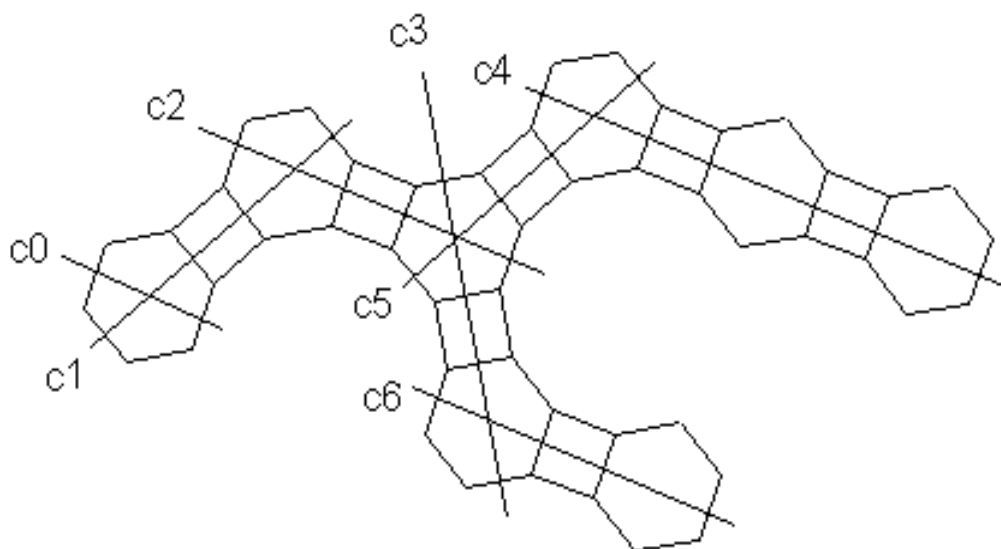
برهان. فرض کنید $C(e) := \{f \in E(G) \mid f \text{ co } e\}$ نشان دهنده مجموعه یال‌هایی از گراف فنیلین مطابق شکل

۱ باشد که با یال e هم فاصله هستند. و همچنین مجموعه $C(e)$ را یک برش متعامد (به طور اختصار، OC) از گراف فنیلین در نظر بگیرید. در نتیجه $E(G)$ اجتماع مجزایی از برش‌های متعامد می‌باشد یعنی $E(G) = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ و $C_i \cap C_j = \Phi$ برای $i \neq j$ و $i, j = 1, 2, \dots, k$.

با در نظر گرفتن این برش‌های متعامد به آسانی دیده می‌شود که شاخص امگا یک فنیلین، مستقل از طول و تعداد قطعه‌ها می‌باشد و فقط به تعداد شش ضلعی‌ها و چهارضلعی‌ها در فنیلین بستگی دارد. همچنین این گراف دارای s برش به طول‌های $2l_i$ و $3n-s$ برش به طول ۲ می‌باشد. بنابراین $\Omega(G) = 3n - s + s = 3n$ و اثبات کامل است.

منابع و مراجع:

- [1]. Karmarkar, S., Karmarkar, S., Joshi, S., Das, A., Khadikar, P. V., (1997) Novel Application of Wiener vis-a-vis Szeged Indices in Predicting Polychlorinated Biphenyls in the Environment. *J. Serb. Chem. Soc.* 62, 227-234.
- [2]. Khadikar, P. V., Deshpande, N. V., Kale, P. P., Dobrynin, A., Gutman, I., Domotor, G., (1995) The Szeged Index and an Analogy with the Wiener Index. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 35, 547-550.
- [3]. Khadikar, P. V., (2000) on a novel structural descriptor PI. *Nat. Acad. Sci. Lett.* 23, 113-118.
- [4]. Khadikar, P. V., Karmarkar, S., Agrawal, V.K., (2001) A novel PI index and its applications to QSPR/QSAR studies. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 41, 934-949.
- [5]. Khadikar, P. P., Deshpande, N. V., Kale, P. P., Dobrynin, A. A., Gutman, I., Domotor, G., (1995) The Szeged Index and an Analogy with the Wiener Index. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 35, 545-550.
- [6]. Diudea, M. V., (2006) Omega polynomial, *Carpath. J. Math.*, 22, 43-47.
- [7]. Diudea, M.V. (2010) Counting Polynomials and Related Indices by Edge Cutting Procedures. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, 64, 569-576.
- [8]. J. Bondy and U. Murty, Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 244, Springer, 2008.



شکل ۱. یک گراف فنیلین