

## روشی جدید برای رتبه‌بندی و تفاضل اعداد خاکستری بازه‌ای

فرید پورافقی<sup>\*</sup>، داود درویشی سلوکلائی<sup>۲</sup>.

۱- دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور؛ [f\\_pourofoghi@pnu.ac.ir](mailto:f_pourofoghi@pnu.ac.ir)

۲- دانشیار گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور؛ [d\\_darvishi@pnu.ac.ir](mailto:d_darvishi@pnu.ac.ir)

### چکیده

با توجه به عدم قطعیت موجود در داده‌ها و اطلاعات مسائل واقعی جهان، نمی‌توان همواره از داده‌های دقیق در مسائل استفاده کرد. در بسیاری از مسائل کاربردی، داده‌های مساله، نادقیق بوده که برای بیان این عدم قطعیت داده‌ها، می‌توان از اعداد خاکستری استفاده شود. رتبه‌بندی و مقایسه اعداد خاکستری نشان دهنده یک روش تصمیم‌گیری بسیار مهم در هر محیط خاکستری است. روش‌های مختلفی برای رتبه‌بندی اعداد خاکستری ارائه شده است که هر کدام دارای معایب و مزایایی هستند. در این مقاله، یک روش رتبه‌بندی جدید و یک روش تفاضل جدید برای اعداد خاکستری بازه‌ای ارائه شده است که موجب بهبود جواب و کاهش حجم محاسبات می‌شود. در پایان یک مثال برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه می‌شود. به کارگیری این رویکرد در سایر مدل‌های برنامه‌ریزی خطی خاکستری در برنامه تحقیقات آینده نویسندگان می‌باشد.

**کلمات کلیدی:** سیستم خاکستری، اعداد خاکستری، رتبه‌بندی خاکستری.

### ۱. مقدمه

تصمیم‌گیری، انتخاب یک گزینه از بین گزینه‌های مختلف است ولی این انتخاب در محیط‌های نادقیق بسیار دشوار می‌باشد. به منظور تصمیم‌گیری صحیح باید اطلاعات آماری دقیق و کامل در محل مناسب، موقعیت مشخص، زمان لازم و موضوع معینی در دسترس باشد. از آنجایی که ممکن است اطلاعات در زندگی واقعی دقیق و کامل نباشند، لذا نیازمند به تصمیم‌گیری برای داده‌های نادقیق می‌باشیم. برای در نظر گرفتن عدم قطعیت در موقعیت‌های زندگی واقعی، به عنوان یک مدل متفاوت برای نمایش عدم قطعیت، پروفیسور دنگ نظریه سیستم‌های خاکستری را در سال ۱۹۸۲ پیشنهاد کرد [۱]. نظریه سیستم‌های خاکستری بر مطالعه سیستم‌های نامطمئن با اطلاعات جزئی شناخته شده و ناشناخته تمرکز دارد که موضوعات مربوط به ویژگی‌های اطلاعات ضعیف به عنوان موضوعات تحقیقاتی آن در نظر گرفته می‌شود [۲]. استفاده نظریه سیستم‌های خاکستری، رویکردی جدید برای حل مساله با داده‌های نادقیق در اختیار تصمیم‌گیرندگان قرار

\* Corresponding author: فرید پورافقی، دکتری ریاضی کاربردی، دانشگاه پیام نور

Email: [f\\_pourofoghi@pnu.ac.ir](mailto:f_pourofoghi@pnu.ac.ir)

می‌دهد. با ترکیب نظریه سیستم‌های خاکستری با مسائل مختلف، مسائلی با پارامترهای خاکستری ایجاد می‌شود. نظریه سیستم‌های خاکستری برای توصیف و ترسیم یک عدم قطعیت واقعی و برای مقابله با مشکلات تصمیم‌گیری در زندگی واقعی، از اعداد خاکستری استفاده می‌کند تا اطلاعات عدم اطمینان را نشان دهد [۳]. الگوریتم اعداد خاکستری و سیستم جبری خاکستری اساس نظریه سیستم خاکستری است. رابطه ترتیب بین اعداد نقش مهمی را در انتخاب بهترین گزینه ایفا می‌کند. با توجه به توانایی شناختی محدود انسان‌ها، اغلب به جای مقدار دقیق اطلاعات سیستم، فقط در مورد دامنه اطلاعات شناخت داریم، که پایه و اساس شناخت اعداد خاکستری بازه‌ای را تشکیل می‌دهد [۴]. برای به دست آوردن نتایج علمی صحیح برای یک مساله تصمیم‌گیری خاکستری، مقایسه اعداد خاکستری بسیار مهم است. هنگام حل یک مسئله تصمیم‌گیری، رابطه ترتیب بین اعداد خاکستری بازه‌ای نقش مهمی در انتخاب گزینه بهینه دارد. در طی چند دهه گذشته، چندین محقق روشهای مختلفی را برای مرتب کردن اعداد خاکستری با استفاده از رویکردهای مختلف ریاضی ارائه داده اند [۵، ۶، ۷]. اما با وجود روش‌های متعدد برای رتبه بندی اعداد خاکستری، بدلیل پیچیدگی استفاده از آنها برای حل مسائل خاکستری، روش‌های مختلفی ارائه شده است که مبنای آن سفیدسازی اعداد خاکستری بود. در این روش‌ها مسایل خاکستری به یک مساله دقیق تبدیل می‌شود لذا نمی‌تواند به عنوان جوابی مناسب برای حالت نادقیق در نظر گرفته شود. از این رو، برای غلبه بر کاستی آشکاری که در بالا مورد بحث قرار گرفت. در این مطالعه، یک روش جدید برای رتبه‌بندی و تفاضل اعداد خاکستری بازه‌ای معرفی شد. استفاده از روش پیشنهادی به راحتی قابل درک است و پیچیدگی روشهای قبلی را ندارد و آن را برای یافتن جواب بهینه مسایل خاکستری که در موقعیت واقعی رخ می‌دهند می‌توان به کار برد.

ادامه مقاله به شرح زیر سازماندهی شده است. تعاریف لازم برای نظریه سیستم‌های خاکستری، که در بخش‌های بعدی مورد نیاز است، در بخش ۲ ارائه شده است. رتبه‌بندی پیشنهادی اعداد خاکستری در بخش ۳ آورده شده است. در نهایت، بخش ۴ شامل نتیجه و جمع‌بندی است.

## ۲. نظریه سیستم خاکستری

حل و فصل عدم قطعیت موجود در رفتار سیستم‌ها یکی از موضوعات علمی جذاب بوده و نظریه‌ها و روش‌های متنوعی برای مطالعه سیستم‌های غیر قطعی توسعه داده شده‌اند. نظریه سیستم‌های خاکستری یکی از مهم‌ترین دستاوردهای علمی در زمینه چگونگی استفاده از اطلاعات نادقیق محسوب می‌شود. این نظریه، روشی جدید برای مطالعه مسائلی است که به دلیل داده‌های اندک و اطلاعات محدود، عدم دقت بالایی دارند. نظریه سیستم خاکستری پژوهشگران بسیاری را به خود جلب کرده است [۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵]. در این بخش، به طور مختصر در مورد برخی از تعاریف و مفاهیم مورد نیاز برای مطالعه و تحلیل سیستم خاکستری، بحث خواهد شد.

تعریف ۱-۲- عدد خاکستری بازه‌ای، عددی است که برای مطالعه موضوعاتی که دامنه مشخص و ماهیت غیر قطعی دارند تمرکز دارد یعنی، مقدار دقیق آن در دامنه مشخص نیست.

$$\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}] = \{x \leq t \leq \bar{x}\}, \quad \underline{x} < \bar{x} \quad (1)$$

تعریف ۲-۲- مرکز عدد خاکستری  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  را با نماد  $\otimes x_c$  و عرض (شعاع) آن را با نماد  $\otimes x_w$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\otimes x_c = \frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}, \quad \otimes x_w = \frac{\bar{x} - \underline{x}}{2} \quad (2)$$

تعریف ۳-۲- عدد خاکستری  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  را مثبت می‌نامیم، هرگاه داشته باشیم:  $\otimes x_c \geq 0$   
قضیه ۱-۲: هر عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی می‌تواند به صورت مجموع دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی کوچک تر یا مساوی خودش نوشته شود [۱۳].

$$\forall \otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}], \otimes \hat{x} \geq 0, \exists \otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}], \otimes \hat{y} \geq 0, \otimes z \in [\underline{z}, \bar{z}], \otimes \hat{z} \geq 0$$

به طوری که

$$[\underline{x}, \bar{x}] = [\underline{y}, \bar{y}] + [\underline{z}, \bar{z}].$$

### ۳. رتبه بندی پیشنهادی اعداد خاکستری

فرض کنید  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  دو عدد خاکستری بازه‌ای دلخواه باشند. در این صورت می‌توان آنها را به شکل زیر طبقه‌بندی کرد:

(۱) بازه‌هایی که جدا از هم هستند و اشتراکی ندارند.

$$\text{مثال: } \otimes x = \otimes [2, 3] \text{ و } \otimes y = \otimes [5, 7]$$

(۲) بازه‌هایی که اشتراک جزئی دارند.

$$\text{مثال: } \otimes x = \otimes [2, 5] \text{ و } \otimes y = \otimes [3, 8]$$

(۳) بازه‌هایی که کاملاً تداخل دارند.

$$\text{مثال: } \otimes x = \otimes [3, 5] \text{ و } \otimes y = \otimes [2, 7]$$

تعریف ۳-۱: رابطه ترتیب بین دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$\otimes x \geq_G \otimes y$  اگر و تنها اگر عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی  $\otimes z \in [\underline{z}, \bar{z}]$  وجود داشته باشد به طوری که

$$\otimes [\underline{x}, \bar{x}] = \otimes [\underline{y}, \bar{y}] + \otimes [\underline{z}, \bar{z}].$$

۳-۱- بررسی رابطه مقایسه پیشنهادی در حالت های مختلف

حالت اول: فرض کنید  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی باشند به طوری که  $\bar{x} \leq \bar{y}$  در این صورت خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \otimes [\underline{y}, \bar{y}] &= \otimes [\underline{x}, \bar{x}] + \otimes [\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] \\ \otimes [\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] &\geq \otimes 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \otimes [\underline{y}, \bar{y}] \geq \otimes [\underline{x}, \bar{x}] \quad (۳)$$

مثال ۳-۱: فرض کنید  $\otimes x = \otimes [2, 3]$  و  $\otimes y = \otimes [5, 7]$  دو عدد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \otimes [5, 7] &= \otimes [2, 3] + \otimes [5 - 2, 7 - 3] \\ \otimes [5 - 2, 7 - 3] &= \otimes [3, 4] \geq \otimes 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \otimes [5, 7] \geq \otimes [2, 3] \quad (۴)$$

حالت دوم: فرض کنید  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی باشند به طوری که  $\underline{x} \leq \underline{y} \leq \bar{x} \leq \bar{y}$  در این صورت خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \otimes [\underline{y}, \bar{y}] &= \otimes [\underline{x}, \bar{x}] + \otimes [\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] \\ \otimes [\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] &\geq \otimes 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \otimes [\underline{y}, \bar{y}] \geq \otimes [\underline{x}, \bar{x}] \quad (۵)$$

مثال ۳-۲: فرض کنید  $\otimes x = \otimes [2, 5]$  و  $\otimes y = \otimes [3, 8]$  دو عدد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \otimes [3, 8] &= \otimes [2, 5] + \otimes [3 - 2, 8 - 5] \\ \otimes [3 - 2, 8 - 5] &= \otimes [1, 3] \geq \otimes 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \otimes [3, 8] \geq \otimes [2, 5] \quad (۶)$$

حالت سوم: فرض کنید  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی باشند به طوری که  $\underline{y} \leq \underline{x} \leq \bar{x} \leq \bar{y}$  در این صورت خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \otimes [\underline{y}, \bar{y}] &= \otimes [\underline{x}, \bar{x}] + \otimes [\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] \\ \otimes [\underline{y} - \underline{x}, \bar{y} - \bar{x}] &\geq \otimes 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \otimes [\underline{y}, \bar{y}] \geq \otimes [\underline{x}, \bar{x}] \quad (۷)$$

مثال ۳-۳: فرض کنید  $\otimes x = \otimes [3, 5]$  و  $\otimes y = \otimes [2, 7]$  دو عدد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\left. \begin{aligned} \otimes [2, 7] &= \otimes [3, 5] + \otimes [2 - 3, 7 - 5] \\ \otimes [2 - 3, 7 - 5] &= \otimes [-1, 2] \geq \otimes 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \otimes [2, 7] \geq \otimes [3, 5] \quad (۸)$$

۳-۲: روش تفاضل معمولی برای اعداد بازه‌ای نامنفی  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$

فرض کنید  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  دو عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی باشند. بنا بر تعریف تفاضل اعداد خاکستری بازه‌ای داریم:

$$\begin{aligned}\otimes x - \otimes y &= \otimes x + (-\otimes y) = [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}] \\ \otimes [\underline{x}, \bar{x}] - \otimes [\underline{y}, \bar{y}] &= \otimes [\underline{x}, \bar{x}] + \otimes [-\bar{y}, -\underline{y}] = \otimes [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}]\end{aligned}$$

مثال ۳-۴: فرض کنید  $\otimes x = \otimes [\underline{x}, \bar{x}] = \otimes [2, 5]$  و  $\otimes y = \otimes [\underline{y}, \bar{y}] = \otimes [3, 8]$  اعداد خاکستری باشند در این صورت خواهیم داشت:

$$\otimes [3, 8] - \otimes [2, 5] = \otimes [3, 8] + \otimes [-5, -2] = \otimes [-2, 6] \quad (۹)$$

۴-۳: تفاضل پیشنهادی برای اعداد خاکستری بازه‌ای نامنفی  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$

۱. ابتدا با استفاده از روش رتبه بندی جدید، تعیین کنید کدام عدد بزرگ تر است.

۲. با استفاده از قضیه ۱، رابطه بین اعداد خاکستری بازه‌ای نامنفی  $\otimes x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  و  $\otimes y \in [\underline{y}, \bar{y}]$  را با داشتن عدد خاکستری بازه‌ای نامنفی  $\otimes [\underline{z}, \bar{z}]$  به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\otimes [\underline{x}, \bar{x}] = \otimes [\underline{y}, \bar{y}] + \otimes [\underline{z}, \bar{z}]$$

۳. تفاضل اعداد را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\otimes [\underline{x}, \bar{x}] - \otimes [\underline{y}, \bar{y}] = \otimes [\underline{y}, \bar{y}] + \otimes [\underline{z}, \bar{z}] - \otimes [\underline{y}, \bar{y}] = \otimes [\underline{z}, \bar{z}]$$

مثال ۳-۵: فرض کنید  $\otimes x = \otimes [\underline{x}, \bar{x}] = \otimes [2, 5]$  و  $\otimes y = \otimes [\underline{y}, \bar{y}] = \otimes [3, 8]$  اعداد خاکستری باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$\otimes [3, 8] = \otimes [2, 5] + \otimes [1, 3] \quad (۱۰)$$

حال تفاضل این دو عدد را به صورت زیر بدست خواهد آمد.

$$\otimes [3, 8] - \otimes [2, 5] = \otimes [2, 5] + \otimes [1, 3] - \otimes [2, 5] = \otimes [1, 3] \quad (۱۱)$$

حال جواب (۱۱) در مقایسه با جواب (۹) دارای مرکز یکسان و شعاع کوچک تر می‌باشد لذا جواب بهتری می‌باشد.

#### ۴. نتیجه و جمع‌بندی

با وجود روش‌های متعدد برای رتبه‌بندی اعداد خاکستری، بدلیل پیچیدگی استفاده از آنها برای حل مسائل خاکستری، معمولاً از سفیدسازی اعداد خاکستری استفاده می‌شود. در این روشها مسایل خاکستری به یک مساله دقیق تبدیل می‌شود لذا نمی‌تواند به عنوان جوابی مناسب برای حالت نادقیق در نظر گرفته شود. از این رو، برای غلبه بر کاستی آشکاری که در بالا مورد بحث قرار گرفت، در این مطالعه، یک روش رتبه‌بندی و روش تفاضل جدید برای اعداد خاکستری بازه‌ای معرفی شد. استفاده از روش پیشنهادی به راحتی قابل درک است و پیچیدگی روشهای قبلی را ندارد. در پایان تاکید می‌کنیم که از روش رتبه‌بندی و روش تفاضل جدید ارائه شده برای اعداد خاکستری بازه‌ای، در پژوهش‌های بعدی برای مدل‌های برنامه‌ریزی خطی خاکستری می‌توان استفاده کرد.

#### ۵. مراجع

- [1] J.L. Deng, "The control problems of grey systems", *Systems and Control Letters*, 15, pp. 288-294, 1982.
- [2] Q.X. Li and Y. Lin, "A briefing to grey systems theory", *Journal of Systems Science and Information*, vol. 2, no. 2, pp. 178-192, 2014.
- [3] Y. Liu, J. Forrest and N. Xie, "Ranking grey numbers based on dominance grey degrees", *Journal of Systems Engineering and Electronics*, vol. 25, no.4, pp. 618-626, 2014.
- [4] S. Guo, S. Liu and Z. Fang, "Algorithm rules of interval grey numbers based on different kernel and the degree of greyness of grey numbers", *Grey Systems: Theory and Application*, vol. 7, no. 2, pp. 168-178, 2017.
- [5] P. Li and C. Wei, "A new two-stage grey evaluation decision-making method for interval grey numbers", *Kybernetes*, vol. 47, no. 4, pp. 801-815, 2018.
- [6] Y.Liu, J. Forrest and N. Xie, "Ranking grey numbers based on dominance grey degrees", *Journal of Systems Engineering and Electronics*, vol. 25, no. 4, pp. 618-626, 2014.
- [7] N. Xie and J. Xin, "Interval grey numbers based multi-attribute decision making method for supplier selection", *Kybernetes*, vol. 43, no. 7, pp. 1064-1078, 2014.
- [8] D. Darvishi, J. Forrest and S. Liu, "A comparative analysis of grey ranking approaches", *Grey Systems: Theory and Application*, vol.9, no. 4, pp. 472-487, 2019.
- [9] D. Darvishi, F. Pourofoghi and J. Y. Forrest, "Sensitivity analysis of grey linear programming for optimization problems", *Operations Research and Decisions*, vol. 31, no.4, pp. 35-52, 2021.
- [10] J. Saffar Ardabili, D. Darvishi and F. PourOfoghi, "Application of center and width concepts to solving grey linear programming", *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, vol. 6, no. 49, pp. 1-12, 2020.
- [11] S. Liu, Y. Yang and J. Forrest, "Grey Data Analysis", *Springer, Singapore*, 2017.
- [12] F. Pourofoghi, J. Saffar Ardabili and D. Darvishi, "A New Approach for Finding an Optimal Solution for Grey Transportation Problem", *Nonlinear Analysis in Engineering and Sciences*, vol.10, pp. 83-95, 2019.



- [13] F. Pourofoghi, D. Darvishi and J. Saffar Ardabili, “A New Approach to Finding the Answer to Transportation Problems with Grey Parameters”, *Journal of Operations Research in its Applications*, vol.18, no. 2, pp. 59-73, 2020.
- [14] F. Pourofoghi, D. Darvishi and J. Saffar Ardabili, “A New Approach to Finding the Answer of Transportation Problems with Grey Parameters”, *Operational Research and Its Applications*, 18. 2, pp. 59-73, 2021.
- [15] F. Pourofoghi and D. Darvishi, “Applying Duality Results to Solve the Linear Programming Problems with Grey Parameters”, *Control and Optimization in Applied Mathematics (COAM)*, vol. 5 no. 1, pp. 15-28, 2021.